



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (C) tâm $I(2;1;-3)$ và đi qua $M(1;-1;-5)$ có phương trình $(C): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + ax + by + cz + d = 0$. Giá trị biểu thức $T = a + b - c + d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -14

Mặt cầu (C) có tâm $I(2;1;-3)$, bán kính $IM = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-1)^2 + (-5+3)^2} = 3$.

Phương trình mặt cầu $(C): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x - 4y + 12z + 10 = 0.$$

Suy ra $a = -8$, $b = -4$, $c = 12$, $d = 10$.

Vậy $T = -8 - 4 - 12 + 10 = -14$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và $B(0;2;1)$. Biết mặt cầu đường kính AB có dạng $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính giá trị biểu thức $T = 2a - b + 4c + 2d$.

Lời giải

Trả lời: 9

Mặt cầu (C) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB .

$$\text{Bán kính } IA = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0-1)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Phương trình mặt cầu } (C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}, d = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } T = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 9.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 8 = 0$ có phương trình $(C): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $a + b + c + 2d$.

Lời giải

Trả lời: -4

Bán kính mặt cầu là:

$$r = d(I; (P)) = \frac{|2 - 4 + 1 - 8|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3.$$

Phương trình mặt cầu (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0.$$

Suy ra $a = 1; b = 2; c = -1; d = -3.$

Hay $a + b + c + 2d = 1 + 2 + (-1) + 2 \cdot (-3) = -4.$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $I(0; 2; 3)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy .

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi H hình chiếu vuông góc của I lên trục $Oy \Rightarrow H(0; 2; 0).$

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy nên mặt cầu có bán kính $R = IH = 3.$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm thuộc trục Oz . Bán kính của mặt cầu (S) là R . Giá trị R^2 bằng?

Lời giải

Trả lời: 11

Gọi tâm của mặt cầu là $I(a; b; c)$. Vì $I \in Oz$ nên $I(0; 0; c)$.

Mặt cầu đi qua A, B nên có $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 9 + 1 + (c - 2)^2 = 1 + 1 + (c + 2)^2 \Leftrightarrow c = 1.$

Bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{11}.$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2), D(2; 2; 2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm là $I(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a - b - 2c$.

Lời giải

Trả lời: -2

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có dạng $(S):$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0; \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Vì mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 4 - 4b + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 12 - 4a - 4b - 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = b = c = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } I(1; 1; 1) \text{ nên } T = a - b - 2c = -2.$$

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -3), B(-3; -2; -5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) . Tìm bán kính R của mặt cầu (S) .

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Khi đó $AM^2 + BM^2 = 30$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 + (x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 30$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 16z + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 8z + 9 = 0$$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 9$ là phương trình của mặt cầu (S) , có tâm $I(-1; -1; -4)$ và bán kính $R = 3$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0; 1; 2)$ và hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) là $H(4; -3; -2)$. Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $I(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Trả lời: 14

Gọi $I(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-a; 1-b; 2-c); \overrightarrow{IH} = (4-a; -3-b; -2-c)$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

Nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IH} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IH}$ (Vì H là trọng tâm tam giác BCD)

$$\text{Từ đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3; -2; -1).$$

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 14$

Câu 9: Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

Lời giải

Trả lời: 1,5

Ta có: $MA = 3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 9(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$$\Leftrightarrow IA^2 - 9IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB}) = 8MI^2 \quad (1)$$

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB = \frac{1}{2}; IA = \frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$ suy ra M thuộc mặt cầu (S) có tâm là I và bán kính

$$R = \frac{3}{2}.$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 7

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

Lời giải

Trả lời: 1

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$.

với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 12: Trong không gian Oxyz có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2m)^2 + (y+m)^2 + (z-m)^2 = 28 - 3m^2 \quad (1).$$

(1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 28 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}$.

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Trong không gian Oxyz, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π

Lời giải

Trả lời: 2

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a}$.

$$\text{Do đó: } \sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}.$$

Câu 14: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 4y + 6mz + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số và $m < 0$). Trong tất cả các mặt cầu có thể có được với mỗi giá trị của m , viết phương trình mặt cầu có diện tích là 36π . Tính $P = m^2 + 2024$

Lời giải

Trả lời: 2025

Ta có $A = -m; B = 2; C = -3m; D = m^2 + 4$

Ta có $r^2 = A^2 + B^2 + C^2 - D = m^2 + 4 + 9m^2 - m^2 - 4 = 9m^2$

Lại có $S = 4\pi r^2 = 4\pi 9m^2 = 36\pi \Leftrightarrow m^2 = \pm 1 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow P = m^2 + 2024 = (-1)^2 + 2024 = 2025$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M(3; 1; 2)$ trên trục Ox . Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M .

Độ dài bán kính mặt cầu bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1; 0; 0) \Rightarrow IM = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(1; 2; -3)$ và đi qua điểm $B(3; -2; 1)$. Gọi $M(1; b; -3)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b \in \mathbb{R}^*$.

Tung độ điểm M có giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 8

Mặt cầu (S) đi qua $B(3; -2; 1)$ nên bán kính $R = AB$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2 + (1+3)^2} \Leftrightarrow R = 6$$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 36$.

Thay tọa độ điểm $M(1; b; -3)$ vào phương trình mặt cầu (S) , ta có:

$$(1-1)^2 + (b-2)^2 + (-3+3)^2 = 36 \Leftrightarrow (b-2)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} b-2=6 \\ b-2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=8 \\ b=-4 \end{cases}$$

Vì $b > 0$ nên nhận $b = 8$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 3)$, $N(3; -2; -5)$. Mặt cầu (S) có đường kính MN có phương trình dạng $(x-2)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = c$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 20

+) Ta có tọa độ trung điểm I của đoạn MN là $I(2; 0; -1)$ và $\overline{MN} = (2; -4; -8)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{4+16+64} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

+) Suy ra phương trình mặt cầu đường kính MN là: $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 21$

+) Vậy $a+b+c = 0 + (-1) + 21 = 20$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 4)$ và A' là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng Oxy . Mặt cầu (S) có đường kính AA' có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by - 4z + d = 0$. Khi đó $a+b+d$ bằng

Lời giải

Trả lời: -1

+ Ta có tọa độ của A' là $A'(1; 2; 0) \Rightarrow$ tọa độ trung điểm I của đoạn AA' là $I(1; 2; 2)$

có $\overline{AA'} = (0; 0; 4) \Rightarrow AA' = \sqrt{0+0+4^2} = 4$

+ Suy ra phương trình mặt cầu đường kính AA' là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z + 5 = 0$$

+ Vậy $a+b+d = (-2) + (-4) + 5 = -1$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 3)$ và tiếp xúc với trục Ox . Bán kính của mặt cầu trên bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) và H là hình chiếu của I trên trục Ox suy ra $H(2; 0; 0)$

$$\text{và } R = IH = \sqrt{(2-2)^2 + (0+4)^2 + (0-3)^2} = 5.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 3)$ và bán kính là $R = 5$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox . Hoành độ của tâm mặt cầu (S) là

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi I là tâm mặt cầu (S) . Vì tâm I nằm trên tia Ox nên $I(a; 0; 0)$, ($a > 0$).

Vì mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên ta có:

$$d(I, (Oyz)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|a|}{1} = 2 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Do $a > 0$ nên ta nhận $a = 2$, loại $a = -2$. Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(2, 0, 0)$.

Câu 21: Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy) . Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a; b; c)$ ($c > 1$). Tổng $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $(Oxy): z = 0$.

Mặt cầu (S) có đúng một điểm chung với mặt phẳng $(Oxy) \Leftrightarrow R = d(I, (Oxy)) = 3$.

$$\text{Suy ra } (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

$$\text{Cho } x = y = 0 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + (z-3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vì $c > 1$ nên $A(0; 0; 5) \Rightarrow a+b+c = 5$.

Câu 22: Gọi I là giao điểm của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$ và mặt phẳng $(Q): x + y + z - 3 = 0$. Bán

kính của mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $I \in d \Rightarrow I(1 + 2t; -2 - t; t)$.

Vì $I = d \cap (Q)$ nên $I \in (Q) \Rightarrow 1 + 2t - 2 - t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $I(5; -4; 2)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$

$$\Leftrightarrow R = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 5 - (-4) + 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6.$$

Câu 23: Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$, tiếp xúc với trục Oy có bình phương của bán kính là

Lời giải

Trả lời: 10

Vì mặt cầu tiếp xúc với trục tung nên bán kính $R = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Câu 24: Cho điểm $I(-3; 1; 4)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với d có bán kính là (lấy giá trị gần đúng đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 5,48

Vì mặt cầu tiếp xúc với d nên bán kính $R = d(I, d) = IH$ với H là hình chiếu của I lên d .

Vì $H \in d$ nên gọi $H(2t - 1; t + 2; -t - 3)$ mà $IH \perp d$ nên $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$.

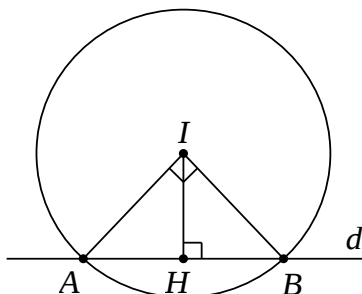
Ta có $\overrightarrow{IH}(2t + 2; t + 1; -t - 7); \overrightarrow{u_d}(2; 1; -1)$

Suy ra $4t + 4 + t + 1 + t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow \overrightarrow{IH}(-2; -1; -5) \Rightarrow R = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30} \approx 5,48$.

Câu 25: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $I(0; 0; 3)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I . Diện tích tam giác IAB bằng

Lời giải

Trả lời: 1



Đường thẳng d đi qua $M(-1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u}(1;2;2)$.

Do đó: $\overrightarrow{IM}(-1;0;-1) \Rightarrow [\vec{u}, \overrightarrow{IM}] = (-2;-1;2)$, suy ra $d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}|}{|\vec{u}|} = 1$.

Vì tam giác IAB là tam giác vuông cân tại I nên $IBA = 45^\circ$.

Khi đó tam giác IBH là tam giác vuông cân tại H .

$$\Rightarrow IB = IH\sqrt{2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.d(I, d) \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.$$

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 = 1$$

Câu 26: Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 9 = 0$, $(Q): 2y + z + 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

Lời giải

Trả lời: 9

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1(1;-2;1)$, (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2(0;2;1)$ nên d có vector chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (-4;-1;2)$.

$$d \text{ đi qua điểm } N(14;0;-5) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (13;-1;-6) \Rightarrow [\overrightarrow{IN}, \vec{u}] = (-8;-2;-17)$$

Khoảng cách từ I đến d là

Gọi h là hình chiếu của I trên d là trung điểm của AB và $h = 9$.

Bán kính mặt cầu là $R = 9$.

Câu 27: Tính bán kính mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, biết mặt phẳng $(P): 4x + 3y + 12z + 1 = 0$ cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng 16π . (làm tròn đến hàng phần trăm)
Giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 4,47

$$d(I; (P)) = \frac{|4 - 3 + 12 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = 2.$$

$$\text{Ta có } S = \pi r^2 \Leftrightarrow 16\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r = 4.$$

$$R_{mc} = \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \approx 4,47.$$

Câu 28: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính R , biết mặt phẳng $(P): 9x + 12y + 8z + 5 = 0$ cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = m + 1$. Tìm tổng các giá trị nguyên của tham số m để bán kính mặt cầu nhỏ hơn 5.
Giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 3

$$\text{Ta có: } r = m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

$$d(I; (P)) = \frac{|9 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2}} = 3.$$

Ta có

$$0 < R_{mc} < 5 \Leftrightarrow \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} < 5 \Leftrightarrow 3^2 + (m+1)^2 < 25 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 3.$$

Kết hợp điều kiện ta được: $-1 < m < 3$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Tổng các giá trị nguyên của m bằng 3.

Câu 29: Gọi $I(m; n; p)$ là tâm của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $M(2; 2; 2)$, $N(4; 0; 2)$, $P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$. Khi đó $T = 2m + n - 3p$ bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Gọi phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

$$\text{Do } M(2; 2; 2) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 4c + d = -12 \quad (1)$$

$$N(4; 0; 2) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4c + d = -20 \quad (2)$$

$$P(4; 2; 0) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4b + d = -20 \quad (3)$$

$$Q(4; 2; 2) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4b - 4c + d = -24 \quad (4)$$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 8$, suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(3; 1; 1)$

$$\text{Khi đó } T = 2m + n - 3p = 2 \cdot 3 + 1 - 3 \cdot 1 = 4$$

Câu 30: Cho 3 điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) có bán kính là

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C .

$$\text{Khi đó } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Do tâm của mặt cầu thuộc mặt phẳng (P) nên $a + b + c - 2 = 0$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ a - b = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Bán kính của mặt cầu là: $R = IA = 1$.

Câu 31: Cho 3 điểm $A(0; 8; 0)$, $B(4; 6; 2)$, $C(0; 12; 4)$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) . Khi đó, $a + b + c = \dots$

Lời giải

Trả lời: 12

Do tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên $I(0; b; c)$ và $a = 0$.

Mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C nên $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-8)^2 + c^2 = 4^2 + (b-6)^2 + (c-2)^2 \\ (b-8)^2 + c^2 = (b-12)^2 + (c-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy tâm $I(0; 7; 5)$. Nên $a + b + c = 12$.

Câu 32: Cho các điểm $A(1; 3; 1); B(3; 2; 2)$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,74

Do tâm I thuộc trục Oz nên $I(0; 0; z)$

$$IA^2 = 1^2 + 3^2 + (z-1)^2$$

$$IB^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 1^2 + 3^2 + (z-1)^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = 3$$

$$\Rightarrow I(0; 0; 3); R^2 = IA^2 = 14$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{14} \approx 3,74$$

Câu 33: Cho các điểm $A(0; 1; 3)$ và $B(2; 2; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 2,29

Do tâm I thuộc trục Oz nên $I(0; 0; z)$

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Gọi I là tâm của mặt cầu, do I thuộc d nên $I(1+2t; 2-t; 3-2t)$

Ta có:

$$IA^2 = (1+2t)^2 + (2-t-1)^2 + (3-2t-3)^2 = 9t^2 + 2t + 2$$

$$IB^2 = (1+2t-2)^2 + (2-t-2)^2 + (3-2t-1)^2 = 9t^2 - 4t + 5$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 9t^2 + 2t + 2 = 9t^2 - 4t + 5$$

$$\Leftrightarrow t = 1/2$$

$$\Rightarrow I(2; 3/2; 2); R^2 = IA^2 = 21/4$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{2} \approx 2,29$$

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ nằm trên đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0$, $(Q): x - 2y - 2 = 0$. Tổng $P = a + b + c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6

Gọi tâm mặt cầu là $I(a; a+1; a+2) \in (d)$. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I; (P)) = d(I; (Q))$.

$$\text{Suy ra } \frac{|2a - a - 2 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 2(a+1) - 2|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a - 6| = |-a - 4| \Leftrightarrow a = 1.$$

Tâm mặt cầu là $I(1; 2; 3) \Rightarrow P = 6$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm thuộc Ox và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y - 2z + 3 = 0$ có bán kính R bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,67

Gọi $I(a; 0; 0)$ là tâm của mặt cầu (S) . Ta có $d(I; (P)) = d(I; (Q)) \Leftrightarrow \frac{|a-1|}{3} = \frac{|a+3|}{3} \Leftrightarrow a = -1$

Khi đó, bán kính của mặt cầu (S) là $R = d(I; (P)) = \frac{|a-1|}{3} = \frac{2}{3}$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S)

là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của mặt cầu đó có kết quả là (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 18,8

Ta dễ dàng kiểm chứng được Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất. Suy ra mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB (với AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2)

Ta có: Δ_1 đi qua $M(4; 1; -5)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3; -1; -2)$

Δ_2 đi qua $N(2; -3; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1; 3; 1)$

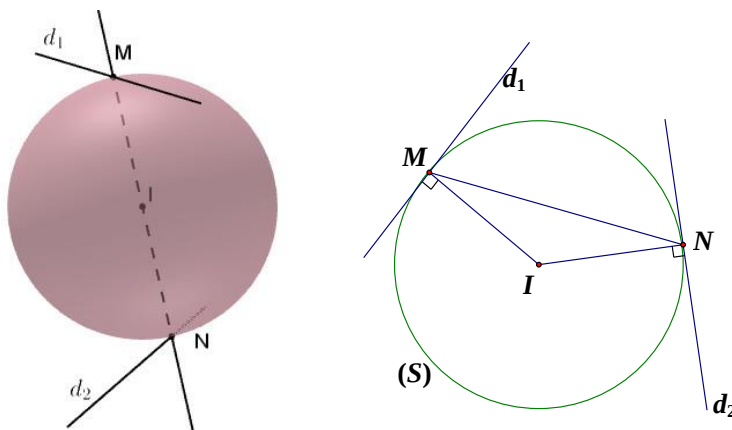
$$\text{Suy ra } d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}} \right] \cdot \overrightarrow{MN} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}} \right] \right|} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Vậy bán kính } R = \frac{AB}{2} = \frac{d(\Delta_1, \Delta_2)}{2} = \sqrt{6}. \text{ Diện tích mặt cầu } (S) \text{ là } S = \pi R^2 = 6\pi \approx 18.8$$

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+10}{-3}$. Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ có bán kính nhỏ nhất trong số các mặt cầu tiếp xúc với cả d_1 và d_2 . Giá trị $T = a^2 - b + c$ có kết quả là

Lời giải

Trả lời: -4



Gọi (S) là mặt cầu tâm I , bán kính R tiếp xúc với d_1 và d_2 lần lượt tại M và N .

Suy ra $IM \perp d_1$ và $IN \perp d_2$. Khi đó ta có $IM + IN \geq MN \Leftrightarrow 2R \geq MN \Leftrightarrow R \geq \frac{MN}{2}$.

Để bán kính R đạt giá trị nhỏ nhất thì MN đạt giá trị nhỏ nhất hay M, I, N thẳng hàng.

Dễ nhận thấy d_1 và d_2 chéo nhau. Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 . Khi đó.

Mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính MN .

Thật vậy, ta có $d_1: \begin{cases} x = -4t \\ y = 3+t \\ z = 4+3t \end{cases}$ có VTCP $\overrightarrow{u_{d_1}} = (-4; 1; 3)$. $M \in d_1 \Rightarrow M(-4t; 3+t; 4+3t)$.

$d_2: \begin{cases} x = 2+4t' \\ y = -2t' \\ z = -10-3t' \end{cases}$ có VTCP $\overrightarrow{u_{d_2}} = (4; -2; -3)$. $N \in d_2 \Rightarrow N(2+4t'; -2t'; -10-3t')$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (2+4t'+4t; -3-2t'-t; -14-3t'-3t)$

Có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{u_{d_1}} \\ \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{u_{d_2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_{d_1}} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_{d_2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27t' + 26t = -53 \\ 29t' + 27t = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \Rightarrow N(-2; 2; -7) \\ t = -1 \Rightarrow M(4; 2; 1) \end{cases}$

Vì mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính MN suy ra tâm $I(1;2;-3)$ hay $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-3 \end{cases}$

Vậy $T = a^2 - b + c = 1^2 - 2 + (-3) = -4$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=mt \\ z=2 \end{cases} (m \in R, t \in R)$ và mặt cầu

$(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$. Biết đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) .

Số giá trị nguyên dương m tương ứng bằng

Lời giải

Trả lời: 0

Gọi $M(1-t; mt; 2) \in d$ là giao điểm (nếu có) của đường thẳng d và mặt cầu (S) .

Thay điểm $M(1-t; mt; 2)$ vào phương trình mặt cầu, ta có: $(1-t)^2 + (mt-2)^2 + (2+2)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow 1 - 2t + t^2 + m^2 t^2 - 4mt + 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (m^2 + 1)t^2 - 2(1 + 2m)t - 4 = 0(1)$$

Để đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) khi

$$\Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow (1 + 2m)^2 + 4(m^2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4m + 4m^2 + 4m^2 + 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 + 4m + 5 < 0(VN)$$

$$\Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Câu 39: Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+3}{3}$.

Khoảng cách ngắn nhất từ tâm mặt cầu (S) đến đường thẳng d bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,38

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=4$

Thay tâm $I(1;-2;3)$ vào phương trình đường thẳng d , ta được: $\frac{0}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{6}{3}$

Nên tâm $I(1;-2;3)$ không thuộc đường thẳng d .

$$\text{Chọn } M(1;-4;-3) \in d \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (0;-2;-6) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}] = (0;-12;4).$$

$$\text{Vậy } d_{(I,d)} = \frac{[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}]}{|\overrightarrow{u_d}|} = \frac{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + 4^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} \approx 3,38$$

Câu 40: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=2+mt \end{cases}$

$(m \in R, t \in R)$. Biết d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B phân biệt và độ dài $AB=6$.

Số giá trị m nguyên thỏa đề bài là

Lời giải

Trả lời: 0

Mặt cầu có dạng: $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 3$

Chọn $M(2; -1; 2) \in d \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (1; 1; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}] = (m+1; -m-1; 0)$

$$\text{Ta có } d_{(I,d)} = \frac{[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}]}{|\overrightarrow{u_d}|} = \frac{\sqrt{(m+1)^2 + (-m-1)^2 + 0^2}}{\sqrt{2+m^2}} = \frac{\sqrt{2m^2 + 4m + 2}}{\sqrt{2+m^2}}$$

$$\text{Vì } d \text{ cắt mặt cầu tại hai điểm } A, B \text{ phân biệt nên } R^2 = d_{(I,d)}^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 9 = \frac{2m^2 + 4m + 2}{2+m^2} + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2 + 4m + 2}{2+m^2} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 19m^2 - 16m + 46 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị tham số m thỏa đề bài.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 4 điểm có tọa độ lần lượt là $A(2; 0; 0)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; 1; -1)$. Tâm của mặt cầu (S) là $I(a; b; c)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b - c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi phương trình tổng quát của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Thay tọa độ 4 điểm vào phương trình mặt cầu, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 1 + 1 + 2a - 2c + d = 0 \\ 9 - 6c + d = 0 \\ 1 + 1 + 1 - 2a - 2b + 2c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ 2a - 2c + d = -2 \\ -6c + d = -9 \\ -2a - 2b + 2c + 2d = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{14} \\ b = \frac{17}{14} \\ c = \frac{19}{14} \\ d = -\frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow T = 4a + b - c = 4 \cdot \frac{11}{14} + \frac{17}{14} - \frac{19}{14} = 3.$$

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 2)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính $T = a + b + c - d$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} M_0(1;1;0) \in \Delta \\ VTCP \vec{u} = (1;1;-1) \end{cases}$. Suy ra $\overrightarrow{MM_0} = (0; -2; -2)$.

Vì Δ là một tiếp tuyến của mặt cầu (S) nên $R = d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{[u, \overrightarrow{MM_0}]}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$.

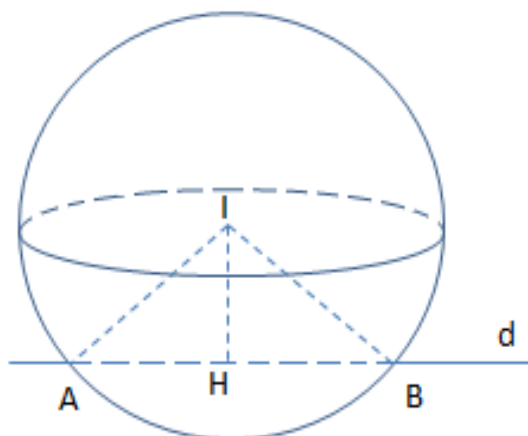
Khi đó phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 8$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 6 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c - d = 0.$$

Câu 43: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tìm bán kính mặt cầu (C) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,21



• Gọi $H(-1+t; 2t; 2+t) \in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d
 $\Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1+t; 2t; -1+t)$

• Ta có vector chỉ phương của $d: \vec{u} = (1; 2; 1)$ và $IH \perp d$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1+t+4t-1+t=0 \Leftrightarrow -2+6t=0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy bán kính của cầu: } R = IA = IB = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{93}}{3} \approx 3,21$$

Câu 44: Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 11$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của mặt cầu (C) tại điểm $A(2;1;0)$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u_d} = (-1; b; c)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tính giá trị $b+c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,71

Mặt cầu (C) có tâm $I = (1; 2; -3)$, khi đó $\vec{IA} = (1; -1; 3)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u_\Delta} = (1; 2; 1)$

Do d là tiếp tuyến của mặt cầu tại điểm $A(2;1;0)$ nên $\vec{IA} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow -b + 3c - 1 = 0$

Lại có d vuông góc với đường thẳng Δ nên $\vec{u_\Delta} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2b + c - 1 = 0$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} -b + 3c - 1 = 0 \\ 2b + c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{7} \\ c = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Vậy $b+c = \frac{5}{7} \approx 0,71$.

Câu 45: Trong không gian Oxy , tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

Trả lời: 6

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = 0 \\ b = m - 2 \\ c = -(m + 3) \\ d = 3m^2 + 7 \end{cases}$$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + (m+3)^2 - (3m^2 + 7) > 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 6 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{7} < m < 1 + \sqrt{7}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Nên $0+1+2+3=6$

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; m; 1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a; b)$ với $a; b$ là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng.

Lời giải

Trả lời: -1

Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$.

Điểm $A(1; m; 1)$ nằm trong khối cầu $(S) \Leftrightarrow 1^2 + m^2 + 1^2 - 2m + 4 \cdot 1 - 9 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 < 0$
 $\Leftrightarrow m \in (-1; 3)$.

Vậy $a^b = -1$

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6-m$.

Để phương trình trên là phương trình mặt cầu thì $6-m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Vậy giá trị nguyên dương m cần tìm là 1; 2; 3; 4; 5.

Vậy có 5 giá trị thỏa đề.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và đi qua $A(5; -1; 4)$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c + R^2$.

Lời giải

Trả lời: 24

Tâm $I(1; -3; 2)$

Bán kính $R = IA = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 24$.

Ta có: $a + b + c + R^2 = 1 + (-3) + 2 + 24 = 24$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 10,2

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x; y; 0)$.

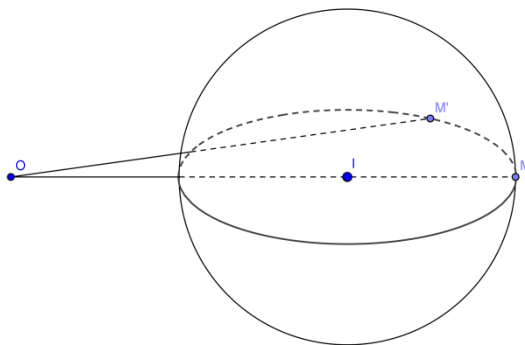
$$\begin{aligned} \begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ (x-1)^2 + 4^2 = (x-2)^2 + 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 + 4^2 = y^2 + 6y + 9 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } I(-2; 1; 0) \end{aligned}$$

Vậy $l = 2R = 2\sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26} \approx 10,2$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;2;-2)$, $B(3;-3;3)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.*

Lời giải

Trả lời: 20,8



Gọi $M(x; y; z)$.

Ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ bán kính $R = 6\sqrt{3}$.

Khi đó $OM_{\max} = d(O;I) + R = OI + R = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20,8$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 2

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - (7m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 5.$$

Với $m \in (-1;5)$ ta có mặt cầu có bán kính là $R = \sqrt{-m^2 + 4m + 5} = \sqrt{-(m-2)^2 + 9}$.

Ta có $(m-2)^2 \geq 0 \Rightarrow -(m-2)^2 + 9 \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{-(m-2)^2 + 9} \leq 3$.

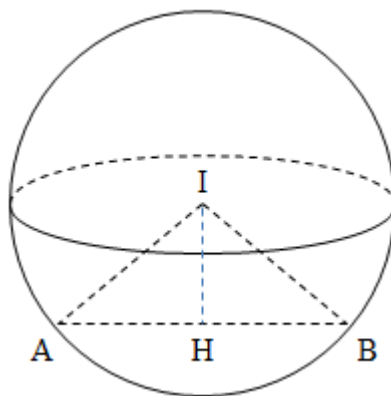
Vậy, bán kính mặt cầu lớn nhất bằng 3 khi $m = 2$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, tính giá trị của $P = \frac{abc}{R}$?

Lời giải

Trả lời: -1,5



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục $Ox \Rightarrow H(1;0;0) \Rightarrow IH = \sqrt{13}$

Mà $HA = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3}$.

Nên bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = 4$.

Khi đó, phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Vậy giá trị của $P = \frac{abc}{R} = \frac{1 \cdot (-2) \cdot 3}{4} = -\frac{3}{2} = -1,5$.

Câu 53: Cho các điểm $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2+t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua

A, B và có tâm thuộc đường thẳng d . Bán kính của mặt cầu (S) là $R = a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P = a + b$?

Lời giải

Trả lời: 6

Tâm $I \in d \Rightarrow I(1+t; 1+2t; -2+t)$.

$\overrightarrow{AI} = (3+t; -3+2t; -3+t)$; $\overrightarrow{BI} = (-1+t; 1+2t; -5+t)$.

Vì (S) đi qua A, B nên ta có:

$$\begin{aligned} IA = IB &\Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (3+t)^2 + (-3+2t)^2 + (-3+t)^2 = (-1+t)^2 + (1+2t)^2 + (-5+t)^2 \\ &\Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (3; -3; -3). \end{aligned}$$

Suy ra, bán kính mặt cầu (S) : $R = IA = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$.

Vậy giá trị của $P = a + b = 3 + 3 = 6$.

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1; -1; 0)$. Khi đó giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 14

Ta có: phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$
. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(1 - 2t; 2t; 2 + t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1 - 2t; 2t; 2 + t) \in \Delta$ và tiếp xúc với (P) tại $H(1; -1; 0)$ nên ta có:

$$d(I, (P)) = IH \Leftrightarrow \frac{|2(1 - 2t) - 2t + (2 + t) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{(2t)^2 + (-1 - 2t)^2 + (-2 - t)^2}$$

$$\Leftrightarrow (-5t + 1)^2 = 6(9t^2 + 8t + 5) \Leftrightarrow -29t^2 - 58t - 29 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$$t = -1 \Rightarrow I(3; -2; 1) \Rightarrow a = 3, b = -2, c = 1.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 = 14.$$

Câu 55: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m + 100; m + 370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

Trả lời: 512

Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m + 100; m + 370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$ thì $IA \leq 600 \Leftrightarrow (m - 100)^2 + (m - 80)^2 + (-60)^2 \leq 600^2$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 360m - 340000 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{180 - \sqrt{712400}}{2} \leq m \leq \frac{180 + \sqrt{712400}}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } m \text{ là } \frac{180 + \sqrt{712400}}{2} \approx 512.$$

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$, $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z + 4 = 0$. Gọi mặt cầu $S(I, R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P), (Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$
. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(2 - 3t; 1 + 2t; 1 + 2t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2 - 3t; 1 + 2t; 1 + 2t)$ thuộc Δ và tiếp xúc với $(P), (Q)$ nên ta có:

$$d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|(2 - 3t) + 2(1 + 2t) - 2(1 + 2t) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(2 - 3t) + 2(1 + 2t) - 2(1 + 2t) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |-3t| = |-3t + 6| \Rightarrow t = 1.$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; 3)$ và bán kính $R = 1$.

Vậy đường kính của mặt cầu (S) bằng 2.

Câu 57: Cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{3}$.

Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt trong đó $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0$

Giá trị biểu thức $T = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ bằng (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 70,5

Thay tọa độ tâm $I(1; -2; 3)$ vào phương trình đường thẳng d , ta được: $-\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq 0$.

Nên đường thẳng d không đi qua tâm $I(1; -2; 3)$.

$$\text{Ta có đường thẳng } d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ với } M \in d \Leftrightarrow M(2 + 2t; -4 + t; 3 + 3t)$$

Thay điểm $M(2 + 2t; -4 + t; 3 + 3t)$ vào phương trình mặt cầu (S), ta được:

$$\Leftrightarrow (2 + 2t - 1)^2 + (-4 + t + 2)^2 + (3 + 3t - 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (2t + 1)^2 + (t - 2)^2 + (3t)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 + 5 = 25$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{10}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{70}}{7} \Rightarrow M\left(2 + \frac{2\sqrt{70}}{7}; -4 + \frac{\sqrt{70}}{7}; 3 + \frac{3\sqrt{70}}{7}\right) \\ t = -\frac{\sqrt{70}}{7} \Rightarrow N\left(2 - \frac{2\sqrt{70}}{7}; -4 - \frac{\sqrt{70}}{7}; 3 - \frac{3\sqrt{70}}{7}\right) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = \left(2 + \frac{2\sqrt{70}}{7}\right)^2 + \left(-4 + \frac{\sqrt{70}}{7}\right)^2 + \left(3 + \frac{3\sqrt{70}}{7}\right)^2 \approx 70,5$$

Câu 58: Cho 3 điểm $M(2; 3; 3), N(2; -1; -1), P(-2; -1; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm M, N, P và có tâm thuộc mặt phẳng (α) có bán kính là:

Lời giải

Trả lời: 4

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

$$\text{Mặt cầu qua } M, N, P \Rightarrow \begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \end{cases}$$

Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow 2a + 3b - c + 2 = 0$.

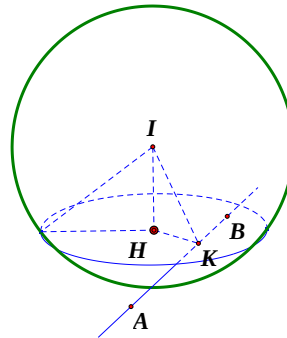
Giải hệ ta được:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \Rightarrow I(2; -1; 3) \\ c = 3 \end{cases}$$

Bán kính của mặt cầu là: $R = IM = 4$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c = \dots$.

Lời giải

Trả lời: 3



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (a; b; c)$

Theo giả thiết $B(0; 1; 0) \in (P): b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -6)$ cùng phương với $\vec{u} = (1; -1; 2)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến.

K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB ,

H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t; 1-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t-1; -t-1; 2t-3)$

$IK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (0; -2; -1)$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - IH^2}$$

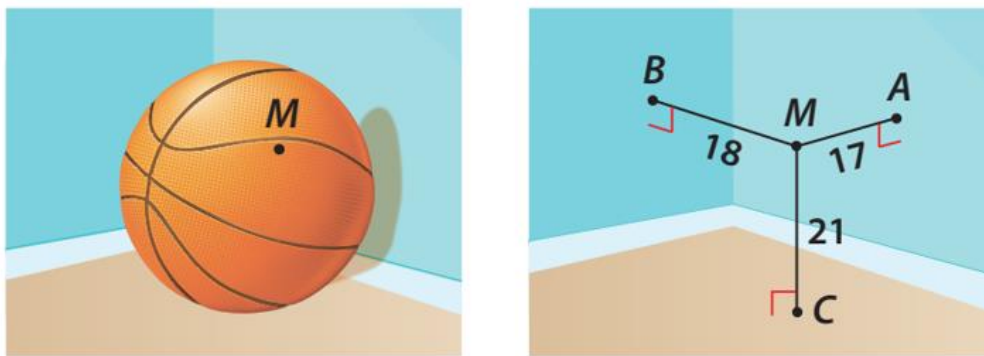
Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$

Mà $IH \leq IK \Rightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow \vec{n}_p$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_p = k \cdot \overrightarrow{IK} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2k \\ c = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ k = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 0 + 2 + 1 = 3.$$

Câu 60: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có

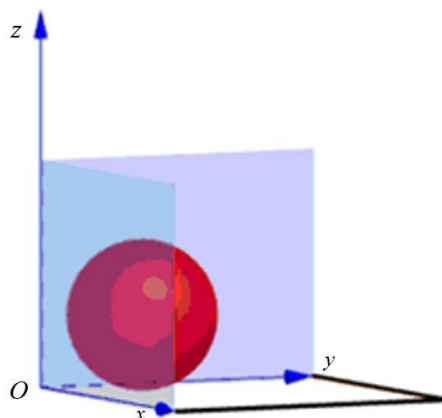
khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đường kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.



Lời giải

Trả lời: 23,9

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt (Oxz) , (Oyz) , và nền là (Oxy) .



Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng tọa độ và chứa điểm $M(17; 18; 21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S): (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$, với $a > 0$ (do mặt cầu tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên $a = b = c = R$).

Do $M(17; 18; 21) \in (S)$ nên $(17-a)^2 + (18-a)^2 + (21-a)^2 = a^2$

$$\Rightarrow 2a^2 - 112a + 1054 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 28 - \sqrt{257} \\ a = 28 + \sqrt{257} \end{cases}$$

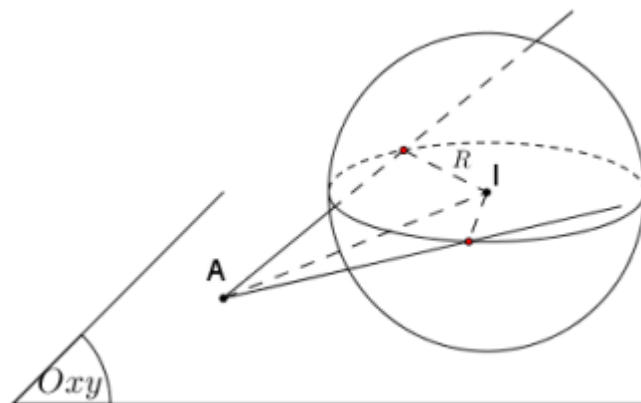
Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a = 28 - \sqrt{257}$ thỏa.

Vậy đường kính quả bóng bằng $2a = 56 - 2\sqrt{257} \approx 23,9(\text{cm})$.

Câu 61: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y)^2 + (z-2)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Lời giải

Trả lời: 12



Mặt cầu có tâm $I(0;0;2)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các tiếp tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón đỉnh A . Để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc ở đỉnh của mặt nón phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

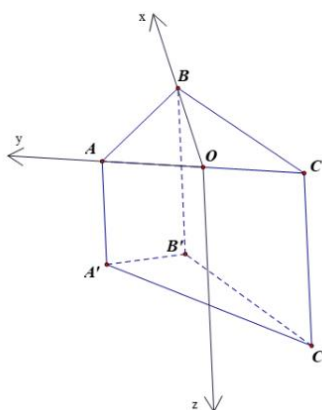
$$\text{Vậy } R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2 + b^2 \leq 4$$

Ta có cặp số $(a;b)$ thỏa mãn là $(0;\pm 1); (0;\pm 2); (\pm 1;0); (\pm 2;0); (1;1); (1;-1); (-1;1); (-1;-1)$.

Câu 62: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 4m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 8m; 8,8m; 9,6m. Biết đáy bể là phẳng. Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần chục) (đơn vị độ)

Lời giải

Trả lời: 21,8.



Gọi 3 điểm ở trên mặt nước lần lượt là A, B, C và ba điểm tương ứng ở đáy bể là A', B', C' sao cho $AA' = 8\text{m}, BB' = 8,8\text{m}, CC' = 9,6\text{m}$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, O là trung điểm của AC

Ta có $A(0;2;0), B(2\sqrt{3};0;0), C(0;-2;0), A'(0;2;8), B'(2\sqrt{3};0;8,8), C'(0;-2;9,6)$.

Ta có $\overrightarrow{A'B'} = (2\sqrt{3};-2;0,8), \overrightarrow{A'C'} = (0;-4;1,6)$.

$$\text{Có } [\overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'C'}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0,8 \\ -4 & 1,6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0,8 & 2\sqrt{3} \\ 1,6 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \right) = \left(0; \frac{-16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3} \right).$$

Mặt phẳng đáy bể là mặt phẳng $(A'B'C')$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; \frac{-16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3})$.

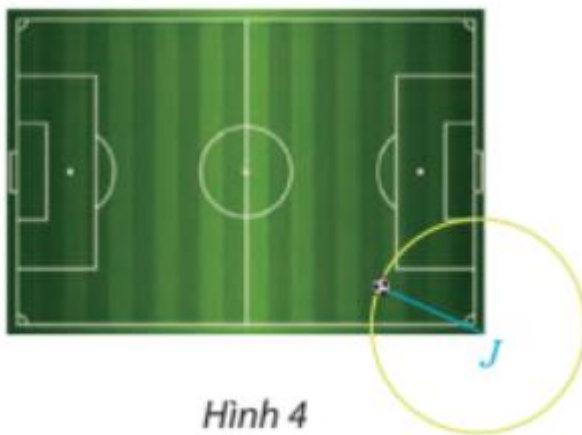
Mặt phẳng nằm ngang (mặt nước) chính là mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ có một vector pháp tuyến là: $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Do đó } \cos((A'B'C'), (Oxy)) = \frac{|0 \cdot 0 - \frac{16\sqrt{3}}{5} \cdot 0 - 8\sqrt{3} \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + (-\frac{16\sqrt{3}}{5})^2 + (-8\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}.$$

Suy ra $((A'B'C'), (Oxy)) \approx 21,8^\circ$.

Vậy đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc khoảng $21,8^\circ$.

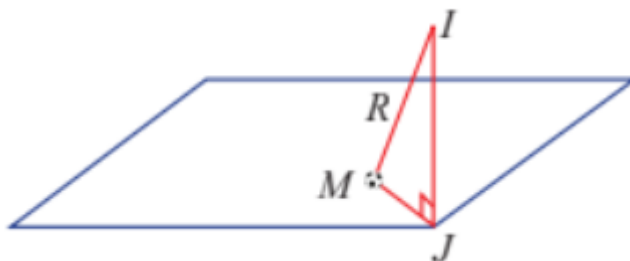
Câu 63: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ toạ độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:



Hình 4

Lời giải

Trả lời: 5.



Mặt cầu (S) có phương trình

$$(x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$$

nên có tâm $I(22;4;13)$ và bán kính $R = \sqrt{194}$.

Trong không gian Oxyz, mặt sân có phương trình $z = 0$ trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy), suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(22;4;13)$ xuống mặt sân có tọa độ $J(22;4;0)$.

Trong tam giác vuông IJM, ta có $IJ = 13, IM = R = \sqrt{194}$, suy ra

$$JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{194 - 169} = 5$$

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là 5 m.

Câu 64: Trong hệ trục tọa độ Oxyz, sàn nhà của một công trình thuộc mặt phẳng Oxy, tay vịn của lan can cầu thang là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(5;1;9)$ và $B(2;1;12)$. Góc tạo bởi tay vịn của lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 45.

Mặt phẳng Oxy có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB} = (-3;0;3)$ là một vector chỉ phương

$$\text{Ta có: } \sin(AB, (Oxy)) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{k}) \right| = \frac{|-3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

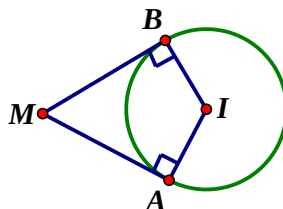
Suy ra $(AB, (Oxy)) = 45^\circ$

Vậy góc tạo bởi tay vịn lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng 45° .

Câu 65: Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian Oxyz (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15;1;6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA, với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 14.



Bề mặt ngoài của quả bóng (S) là một mặt cầu có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R = 3$

$$\text{Ta có: } MI = \sqrt{(1-15)^2 + (1-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{205}$$

$$\text{Suy ra } MA = \sqrt{MI^2 - IA^2} = \sqrt{205 - 9} = \sqrt{196} = 14$$

Vậy $MA = 14 \text{ m}$.

Câu 66: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng 11 (m) . Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.



Lời giải

Trả lời: 13

Vùng phủ sóng của thiết bị đã cho là mặt cầu (S) tâm $A(3;1;1)$, bán kính $R = 11$.

$$\text{Ta có } AE = \sqrt{6^2 + 7^2 + (m-1)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 86},$$

Để điện thoại của người đó bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên thì

$$AE \leq R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 2m + 86} \leq 11 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 86 \geq 0 \\ m^2 - 2m + 86 \leq 121 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 7.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; \dots; 7\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.