

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

- ♦ Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

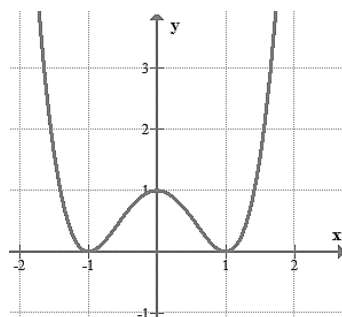
Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x_i) = 0, x_i \in [a; b]$. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $M = \max \{f(a), f(b), f(x_i)\}$

- ♦ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x_i) = 0, x_i \in [a; b]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ là $m = \min \{f(a), f(b), f(x_i)\}$

- ♦ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b); \min_{[a; b]} f(x) = f(a)$
- ♦ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a); \min_{[a; b]} f(x) = f(b)$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $M = 1, m = 0$ nên $M - m = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

A. 3.

B. 2.

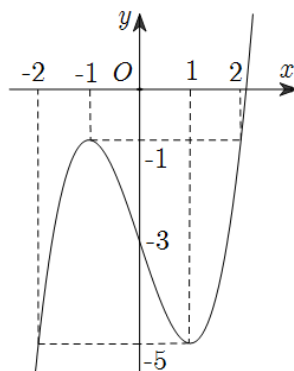
C. 1.

D. 4.

Lời giải

Trên đoạn $[-1; 2]$ ta có giá trị lớn nhất $M = 3$ khi $x = -1$ và giá trị nhỏ nhất $m = 0$ khi $x = 0$.
 Khi đó $M + m = 3 + 0 = 3$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\square$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



A. $m = -5; M = -1$.

B. $m = -2; M = 2$.

C. $m = -1; M = 0$.

D. $m = -5; M = 0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$$M = \max_{[-2; 2]} f(x) = -1 \text{ khi } x = -1 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$m = \min_{[-2; 2]} f(x) = -5 \text{ khi } x = -2 \text{ hoặc } x = 1.$$

Câu 4: Xét hàm số $y = f(x)$ với $x \in [-1; 5]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	5
y'	+	0	-	0
y	3	4	0	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$

B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$

- C.** Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $[-1; 5]$
- D.** Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$

Lời giải

- A.** Đúng. Vì $\lim_{x \rightarrow 5} y = +\infty$ nên hàm số không có GTLN trên đoạn $[-1; 5]$.
- B.** Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.
- C.** Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$ và $\lim_{x \rightarrow 5} y = +\infty$.
- D.** Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
y'	$-$	$ $	$+$	0	$+$	$ $	$-$
y	$+\infty$				2		
			-3			-4	

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.** Hàm số có hai điểm cực trị.
- B.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
- C.** Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
- D.** Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào BBT ta thấy hàm số không có GTLN, GTNN.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

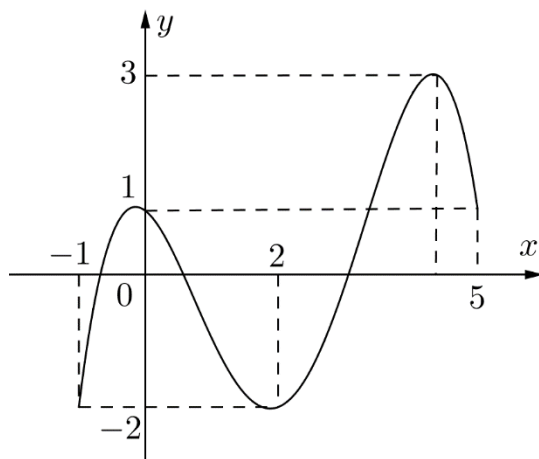
x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

- A.** $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1; 5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 5]$ bằng



A. -1

B. 4

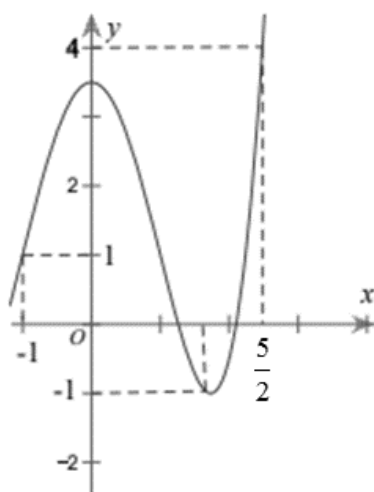
C. 1

D. 2

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy:
$$\begin{cases} M = \max_{[-1;5]} f(x) = 3 \\ n = \min_{[-1;5]} f(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow M + n = 1.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là:

A. $M = 4, m = 1$

B. $M = 4, m = -1$

C. $M = \frac{7}{2}, m = -1$

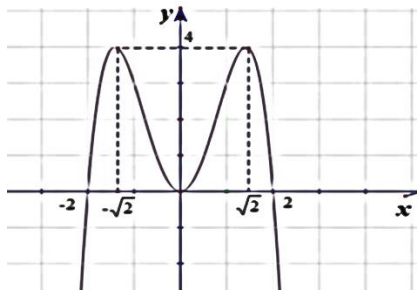
D. $M = \frac{7}{2}, m = 1$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M = 4, m = -1$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ là:



- A. $\max_{[0;2]} f(x) = 2$. B. $\max_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$.
 C. $\max_{[0;2]} f(x) = 4$. D. $\max_{[0;2]} f(x) = 0$.

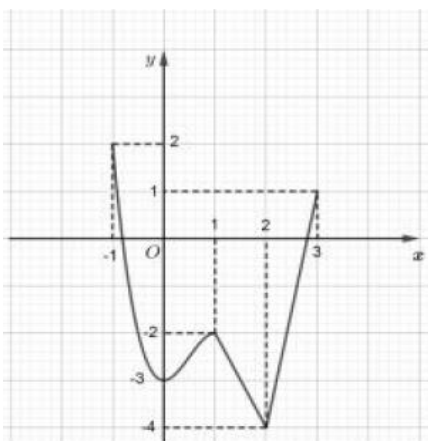
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0; 2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \sqrt{2}$

Suy ra $\max_{[0;2]} f(x) = 4$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M + m$ là



- A. 2 B. -6 C. -5 D. -2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy GTLN của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ là $M = 2$ đạt được tại $x = -1$ và GTNN của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ là $m = -4$ đạt được tại $x = 2$

$$\Rightarrow M + m = 2 + (-4) = -2$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau

x	-5	1	7
y'	-	0	+
y	6	2	9

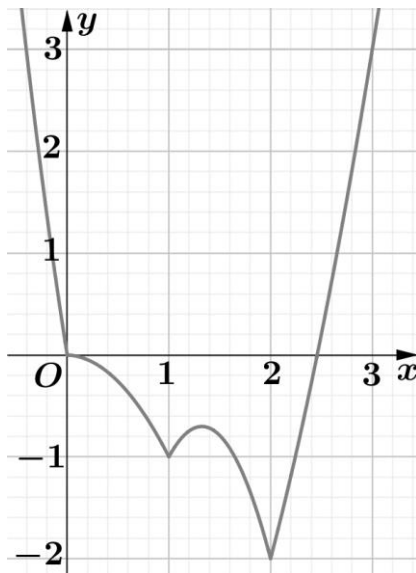
Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\min_{[-5;7)} f(x) = 6$. B. $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$. C. $\max_{[-5;7)} f(x) = 9$. D. $\max_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5;7)$, ta có: $\min_{[-5;7)} f(x) = f(1) = 2$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M + m$ bằng?

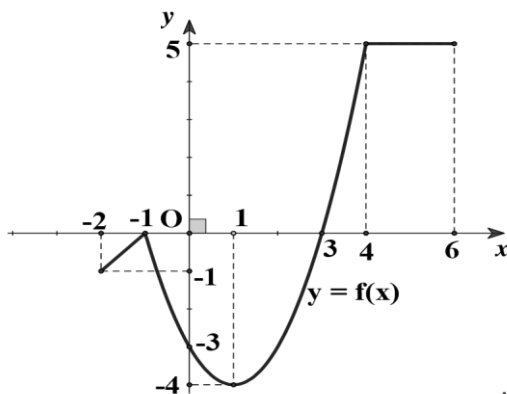


- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có: $M = 3$, $m = -2$ nên $M + m = 1$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M - m$ bằng

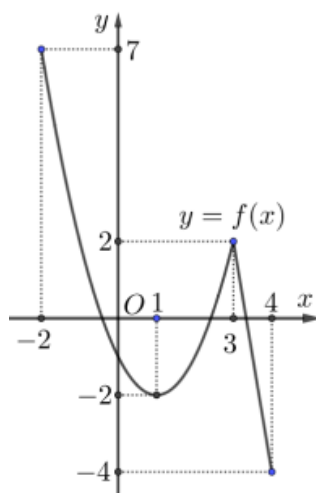
- A. 9. B. -8. C. -9. D. 8.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $-4 \leq f(x) \leq 5 \quad \forall x \in [-2;6]$; $f(1) = -4$; $f(4) = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M - m = 9.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



A. 5

B. 3

C. 0

D. -2

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$$m = \min_{x \in [-2; 4]} f(x) = -4, \quad M = \max_{x \in [-2; 4]} f(x) = 7$$

Khi đó $M + m = 3$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$ B. $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$ C. $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$ D. $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		-	-	0	+	0	-
y							

$f(-1)$ $f(0)$ $f(1)$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN

□ **Bước 1:** Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

□ **Bước 2:** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

□ **Bước 3:** Khi đó:

$$\max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

Câu 16: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

A. $T = [1; 9]$. **B.** $T = [2\sqrt{2}; 4]$. **C.** $T = (1; 9)$. **D.** $T = [0; 2\sqrt{2}]$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [1; 9]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 9-x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

$$f(1) = f(9) = 2\sqrt{2}; \quad f(5) = 4$$

Vậy tập giá trị là $T = [2\sqrt{2}; 4]$.

Câu 17: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

A. $\frac{15}{2}$. **B.** 5. **C.** $\frac{29}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có hàm số $y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ xác định và liên tục trên $[2; 3]$.

$$+ y' = f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin [2; 3] \text{ mà } f(2) = 5, \quad f(3) = \frac{29}{3}.$$

+ Vậy $\min_{[2;3]} y = 5$ tại $x = 2$.

Câu 18: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$

A. $M = \frac{1}{3}$. **B.** $M = -\frac{1}{3}$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = -5$

Lời giải

Chọn A

Trên đoạn $[0; 2]$ ta luôn có $y' = -\frac{8}{(x-3)^2} < 0 \forall x \in (0; 2)$

Vì $y(0) = \frac{1}{3}, y(2) = -5$ nên $M = \max_{[0;2]} y = \frac{1}{3}$.

Câu 19: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ là

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

- Tập xác định: $D = [-2; 2]$
- Ta có: $y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-2; 2)$
- Ta có: $\begin{cases} y(-2) = y(2) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \max_{[-2;2]} y = 2$.

Câu 20: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$.

- A.** -20. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Xét $f(t) = t^2 - 4t - 5, t \in [-1; 1]$.

$$f'(t) = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin [-1; 1].$$

$$f(1) = -8, f(-1) = 0.$$

Ta thấy $\min_{[-1;1]} f(t) = f(1) = -8$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8.

Câu 21: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính tổng $S = 2m + 3M$.

- A.** $S = -\frac{7}{2}$. **B.** $S = -\frac{3}{2}$. **C.** -3. **D.** $S = 4$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, cho $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \in [0; 3]$.

Khi đó: $f(0) = -1, f(3) = -\frac{1}{2}$ nên $m = -1$ và $M = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } S = 2m + 3M = -\frac{7}{2}.$$

Câu 22: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$ là

A. $\frac{9}{8}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

$$f(x) = \sin x + \cos 2x = \sin x + 1 - 2\sin^2 x$$

Đặt $\sin x = t$ ($0 \leq t \leq 1$)

$$f(t) = -2t^2 + t + 1, \quad f'(t) = -4t + 1$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

Vậy $\max_{[0;1]} f(x) = \frac{9}{8}$.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0; \pi]$.

A. $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2}{3}$.

B. $\max_{[0;\pi]} y = \frac{10}{3}$.

C. $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\max_{[0;\pi]} y = 0$.

Lời giải

Đặt: $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1] \Rightarrow y = 2t - \frac{4}{3}t^3$.

$$y' = 2 - 4t^2 \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \end{cases}$$

Tính: $y(-1) = \frac{-2}{3}, \quad y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad y(1) = \frac{2}{3}$.

Vậy: $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 24: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M^2 + m^2$ là

A. $\frac{31}{2}$.

B. $\frac{11}{2}$.

C. $\frac{41}{4}$.

D. $\frac{61}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x, \quad t \in [0; 1]$.

Xét hàm $f(t) = \frac{3t+2}{t+1}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ có $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0, t \in [0;1]$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$.

$$\Rightarrow M = \max_{[0;1]} f(t) = f(1) = \frac{5}{2} \text{ và } m = \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 2.$$

$$\text{Khi đó } M^2 + m^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{41}{4}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

- A.** $M = m + \frac{3}{2}$. **B.** $M = \frac{3}{2}m$. **C.** $M = m + 1$. **D.** $M = m + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $\sin x = t, (-1 \leq t \leq 1)$ ta được $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y' = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Vì $y(-1) = 0; y(0) = 1; y(1) = \frac{2}{3}$ nên

$$\max_{[-1;1]} y = y(0) = 1 \Rightarrow M = 1; \min_{[-1;1]} y = y(-1) = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Vậy $M = m + 1$.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a;b)$.

- ☐ **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- ☐ **Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- ☐ **Bước 3.** Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(x_i), f(\alpha_i)$.
- ☐ **Bước 4.** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a;b)} f(x), m = \min_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất.

Câu 26: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m ?

- A.** $m = 5$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y				$+\infty$	4	$+\infty$

$$\Rightarrow m = \min_{(1; +\infty)} y = 4 \text{ khi } x = 3$$

Câu 27: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0

B. -1

C. -3

D. -2

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$y = x + \frac{1}{x} - 5 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 5 = -3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = -3$

Câu 28: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

A. $m = 4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 3$.

Lời giải

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2; \quad x = 2 \in (0; +\infty).$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
y'		0	
	-		+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2) = 4 \Rightarrow m = 4$.

Câu 29: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$ là:

A. 2

B. $\frac{5}{2}$

C. 0

D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq \frac{3 \cdot 2}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Câu 30: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m .

A. $m = 3$.

B. $m = 4$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ liên tục và xác định trên $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (0; +\infty) \\ x = -2 \notin (0; +\infty) \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất là $m = 4$ khi $x = 2$.

Cách 2:

Với $x \in (0; +\infty) \Rightarrow x; \frac{4}{x} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x > 0 \\ x = \frac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$. Vậy $m = 4$ khi $x = 2$.

Câu 31: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

A. $2 + \sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. 0.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 4]$.

Ta có $y' = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} < 0, \forall x \in D$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	4
y'		-
y	$+\infty$	$\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{(-\infty; 4]} y = \sqrt{3}$ khi $x = 4$. Vậy chọn D.

Câu 32: Với giá trị nào của x thì hàm số $y = x^2 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải

Chọn D

TXD: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$y' = 2x - \frac{1}{x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$	
y'	-		- 0 +		
y	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$+\infty$

Dựa vào BBT thì $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$.

Câu 33: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{2}{x} - (1 + \sqrt{2})^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$

A. không tồn tại.

B. -3.

C. $-1 + \sqrt{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$y' = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y					

$+\infty$ $\searrow$ -3 $\nearrow$ $+\infty$

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = f(\sqrt{2}) = -3$.

Câu 34: Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.**

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+5} - (x+1) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} = \frac{x^2+5 - x^2 - x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)} = \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}(x^2+5)} = 0 \Leftrightarrow 5-x = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	5	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	-1	$\frac{\sqrt{30}}{5}$	1

Từ bảng biến thiên có $\max_{\mathbb{R}} y = y(5) = \frac{\sqrt{30}}{5}$ khi $x = 5$.

Hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ không có giá trị nhỏ nhất.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.