

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG. ĐỊNH MỀM GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bước 1. Tìm nghiệm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ của $y' = 0$ thuộc $[a; b]$

Bước 2. Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ theo tham số

Bước 3. So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bước 4. Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

Lưu ý:

- ♦ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b); \min_{[a; b]} f(x) = f(a)$
- ♦ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a); \min_{[a; b]} f(x) = f(b)$

Câu 1: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $m > 10$. **B.** $8 < m < 10$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $4 < m < 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

- Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1$.

- Nếu $m \neq 1$ khi đó $y' < 0, \forall x \in [1; 2]$ hoặc $y' > 0, \forall x \in [1; 2]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x = 1, x = 2$.

Theo bài ra: $\max_{[1; 2]} y + \min_{[1; 2]} y = 8 \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5} \in (8; 10)$.

- Câu 2:** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .
- A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2} > 0, \forall x \neq m$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$ $-\infty$	1

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m < 0 \\ f(4) = -1 \end{cases}$

$$\hat{U} \begin{cases} m < 0 \\ \frac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \end{cases} \quad \hat{U} \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \quad \hat{U} \begin{cases} m < 0 \\ m = 2, m = -3 \end{cases} \quad \hat{U} \quad m = -3.$$

- Câu 3:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-m^2}$ thỏa mãn $\min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.** $3 < m \leq 4$. **B.** $-2 < m \leq 3$. **C.** $m > 4$. **D.** $m \leq -2$.

Lời giải

Chọn B

+TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m^2\}, [-3; -2] \subset D$.

+ Ta có $y' = \frac{-m^2 - 1}{(x - m^2)^2} < 0, \forall x \in D$. Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

$$\text{Nên } \min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2} = y(-2) = \frac{-2+1}{-2-m^2} \Rightarrow -2-m^2 = -2 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow -2 < m \leq 3.$$

- Câu 4:** Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{m^2 x - 1}{x + 2}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 1.
- A.** $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = \sqrt{3}$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $y' = \frac{2m^2+1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 3]$ nên $\max_{[1;3]} y = y(3) \Leftrightarrow \frac{3m^2-1}{5} = 1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(2; 5)$.

B. $(1; 4)$.

C. $(6; 9)$.

D. $(20; 25)$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$.

+ $y' = \frac{8 + m^2}{(x + 8)^2} > 0, \forall x \in D$

Vậy hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 8}$ đồng biến trên $[0; 3]$.

Đ $\min_{[0;3]} y = y(0) = \frac{-m^2}{8}$

Để $\min_{[0;3]} y = -3 \Leftrightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$.

Đ $m_0 = 2\sqrt{6} \in (2; 5)$. Vậy chọn **A**.

Câu 6: Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng 3.

A. $m = 3$.

B. $m = 1$.

C. $m = 7$.

D. $m = 5$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{2-m}{(x+1)^2}$.

+ Xét $m = 2$.

$\Rightarrow$ Hàm số trở thành: $y = 2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m = 2$

+ Xét $m > 2$.

$$\Rightarrow y' = \frac{2-m}{(x+1)^2} < 0 \ (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min_{[0;4]} y = y(4) = \frac{8+m}{5}.$$

$$\Rightarrow \frac{8+m}{5} = 3 \Leftrightarrow m = 7.$$

+ Xét $m < 2$.

$$\Rightarrow y' = \frac{2-m}{(x+1)^2} > 0 \ (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min_{[0;4]} y = y(0) = m.$$

$$\Rightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 7$.

Câu 7: Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 .

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y' = \frac{1-(-m^2+m)}{(x+1)^2} = \frac{m^2-m+1}{(x+1)^2} > 0; \forall x \in D.$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.

Ta có: $y(0) = -2 \Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 \leq m < 3$

B. $m > 6$

C. $m < 1$

D. $3 < m \leq 6$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Với $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ thì $\min_{[0;1]} y = 1 < 3$.

Suy ra $m \neq 1$. Khi đó $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min_{x \in [0;1]} y = y(0) \vee m = 3$.

TH 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min_{x \in [0;1]} y = y(1) \vee m = 5$.

Câu 9: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $m > 10$. **B.** $8 < m < 10$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $4 < m < 8$.

Lời giải

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

Do vậy $\min_{x \in [1;2]} y + \max_{x \in [1;2]} y = y(1) + y(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}$.

Câu 10: Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B = \frac{13}{2}$.

- A.** $m = 1; m = -2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = -1; m = 2$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$y' = \frac{-m^2-m-1}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in [2;3] \Rightarrow A = f(3) = \frac{m^2+m+3}{2}, B = f(2) = \frac{m^2+m+2}{1}$.

$A+B = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2+m+3}{2} + \frac{m^2+m+2}{1} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

- A.** $(20;25)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3] \Rightarrow$ hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$

$$\Rightarrow \min_{[0;3]} f(x) = f(0) = \frac{-m^2}{8}.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \min_{[0;3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \end{cases}.$$

Mà $m > 0, m \in \mathbb{Q} \Rightarrow m = 2\sqrt{6} \approx 4,9 \in (2;5)$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m = 2$.

B. $m = 6$.

C. $m = 0$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$, ta có $y' = -3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{cases}$

$$\text{Mà } \begin{cases} y'(-1) = m - 2 \\ y'(0) = m \\ y'(1) = m - 4 \end{cases}$$

Do đó $\min_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = 2 + \sqrt{2}$.

C. $m = 4 + \sqrt{2}$.

D. $\begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Trên $[-1;1]$ thì $y'_{(-1)} = m - 4$; $y'_{(0)} = m$; $y'_{(1)} = m - 2$

nên $\min_{[-1;1]} y = \sqrt{2} \Leftrightarrow m - 4 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 4 + \sqrt{2}$

Câu 14: Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $2018m_0 - m_0^2 \leq 0$. **B.** $2m_0 - 1 < 0$. **C.** $6m_0 - m_0^2 < 0$. **D.** $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

+ Đặt $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$.

+ Ta có: $f'(x) = 3x^2 + m^2 + 1$. Dễ thấy rằng $f'(x) > 0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min_{[0;1]} y = \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = m + 1$.

+ Theo bài ra ta có: $m + 1 = 5$, suy ra $m = 4$.

+ Như vậy $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \leq 0$.

Câu 15: Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

- A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$

Tập xác định: $D = [-1;1]$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} = x \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ \sqrt{1 - x^2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $y(-1) = -1 + m$, $y(1) = 1 + m$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + m$.

Do hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ liên tục trên $[-1;1]$ nên $\max_{[-1;1]} y = m + \sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\max_{[-1;1]} y = 2\sqrt{2}$, suy ra $m + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m ?

- A.** $m = -6$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = -5$.

Lời giải

Chọn C

Xét $[-1;1]$ có $y' = 6x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 1 \in [-1;1] \end{cases}.$$

Khi đó

$$y(-1) = -5 - m; \quad y(0) = -m; \quad y(1) = -1 - m$$

Ta thấy $-5 - m < -1 - m < -m$ nên $\min_{[-1;1]} y = -5 - m$.

Theo bài ra ta có $\min_{[-1;1]} y = -1$ nên $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 17: Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 . Tính tích các phần tử của S .

- A.** 2. **B.** -2. **C.** -15. **D.** -17.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 3m^2x - 4 = 0 \quad (\Delta = 9m^2 + 64) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3m^2 + \sqrt{9m^2 + 64}}{8} > 1 \\ x = \frac{3m^2 - \sqrt{9m^2 + 64}}{8} < 0 \end{cases}$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên

$$y(0) + y(1) = -16 \Leftrightarrow -m + (-m^2 - m - 1) = -16 \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 15 = 0.$$

Vậy $m_1 \cdot m_2 = -15$.

Câu 18: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$.

- A.** $0 < m < 1$ **B.** $m > 1$ **C.** $m > 2$ **D.** $-1 < m < 1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m-1 \\ x_2 = -m+1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	$-m$	0	x_2	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y		$\mathcal{CD}$			$+\infty$		CT	
	$-\infty$							$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0; 2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $0 < m < 1$.

CÓ THỂ GIẢI NHƯ SAU:

Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$ nên $-m \notin [0; 2] \Rightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} (*)$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$$

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm là } \begin{cases} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{cases}$$

$x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0; 2)$

Ta thấy $-m+1 > -m-1, \forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1 (**)$

Từ $(*)$, $(**)$ ta có $0 < m < 1$

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{1 - m \sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 ?

A. 1.

B. 9.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{1 - m \sin x}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y \cos x + m \sin x = 1 - 2y.$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $y^2 + m^2 \geq 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}.$$

Theo đề bài, ta có:
$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 + 3m^2} > 8 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20: Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số

$y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $d - 11a$.

B. $d - 16a$.

C. $d + 2a$.

D. $d + 8a$.

Lời giải

Vì $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có

hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0$, $c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1	2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0	$-$				
y	$+\infty$							$f(2)$				$-\infty$

Ta suy ra $\max_{x \in [1; 3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m \leq 1$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$

$$+ y' = \frac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \quad (*)$$

$\Delta'_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y		0	$f(x_1)$	$f(x_2)$	0	

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2) = \frac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 0 \\ m^2 - m + 1 \geq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5.

B. 1.

C. -3.

D. -8.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow [0; 2] \subset D$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} \Rightarrow y' = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + m}{(x + 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) = m.$$

$$\text{Ta có } y(0) = -m; y(2) = 4 - \frac{m}{3}$$

$$\text{Đặt } g(x) = -(2x^3 + 4x^2 + 2x) \Rightarrow g'(x) = -(6x^2 + 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}.$$

Trên $[0; 2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0	2
$g'(x)$	–	
$g(x)$	0	–36

Từ bảng biến thiên ta có $g(x) \in [-36; 0], \forall x \in [0; 2]$.

Trường hợp 1: $m > 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0) = -m < y(2) = 4 - \frac{m}{3}$ khi $m > 0$.

Khi đó $\text{Max}_{[0;2]} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3$ loại do $m > 0$.

Trường hợp 2: $m < -36 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0) = -m > y(2) = 4 - \frac{m}{3}$ khi $m < -36$.

Khi đó $\text{Max}_{[0;2]} y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5$ loại do $m < -36$.

Trường hợp 3: $m \in [-36; 0] \Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất.

Trên $[0; 2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0	x_0	2
$g'(x)$	–		
$g(x)$	0	$y(x_0)$	–36

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

$$+ x = x_0 : g(x) = m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) = m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow y' = 0.$$

$$+ x \in (0; x_0) : g(x) > m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) > m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m < 0 \Leftrightarrow y' < 0.$$

$$+ x \in (x_0; 0) : g(x) < m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) < m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m > 0 \Leftrightarrow y' > 0.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	x_0	2
y'	–	0	+
y	$y(0)$	$y(x_0)$	$y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\text{Max}_{[0;2]} y \in \{y(2); y(0)\}$.

Nếu $m \in [-36; -6] \Rightarrow y(0) \geq y(2) \Rightarrow \text{Max}_{[0;2]} y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5$ (l).

Nếu $m \in [-6; 0] \Rightarrow y(0) \leq y(2) \Rightarrow \max_{[0;2]} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3(n)$.

Vậy $m = -3$ thỏa đề.

Cách 2:

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow [0; 2] \subset D$.

Ta có: $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1} = x^2 - \frac{m}{x+1} \Rightarrow y' = 2x + \frac{m}{(x+1)^2}$.

Trường hợp 1: $m \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in [0; 2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0; 2]$.

$\Rightarrow \max_{[0;2]} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3$ loại do $m > 0$.

Trường hợp 2: $m < 0$, giả sử $\Rightarrow \max_{[0;2]} y = y(x_0)$ với $x_0 \in (0; 2)$. Do hàm số liên tục trên $[0; 2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x_0(x_0+1)^2 \\ \frac{x_0^3 + x_0^2 - m}{x_0+1} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^3 + x_0^2 + 2x_0(x_0+1)^2 = 5(x_0+1) \Leftrightarrow x_0 = \frac{-5}{3} \vee x = 1(n) \Rightarrow m = -8.$$

$$\text{Khi đó: } y' = 2x + \frac{-8}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	2		
y'		-	0	+	
y	8		5		$\frac{20}{3}$

$\Rightarrow m = -8$ không thỏa yêu cầu đề.

Nên không tồn tại $x_0 \in (0; 2)$ để $\max_{[0;2]} y = y(x_0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max_{[0;2]} y = y(2) \Rightarrow m = -5 \\ \max_{[0;2]} y = y(0) \Rightarrow m = -3 \end{cases}$$

Nếu $m = -5 \Rightarrow y(0) = 5; y(2) = \frac{17}{3} \Rightarrow \max_{[0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3} \neq 5 \Rightarrow m = -5(l)$.

Nếu $m = -3 \Rightarrow y(0) = 3; y(2) = 5 \Rightarrow \max_{[0;2]} y = y(2) = 5 \Rightarrow m = -3(n)$.

Vậy $m = -3$ thỏa đề.

Câu 23: Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

- A.** 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$$D = \square.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 - 3x, x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-2; 2].$$

$$\text{Khi đó ta có hàm số } f(t) = (t + m)^2.$$

$$f'(t) = 2(t + m); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -m.$$

$$\text{Trường hợp 1: } -2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

t		-2	$-m$	2	
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$			$f(-m)$		

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min_{[-2; 2]} f(t) = f(-m) = 0$ không thỏa mãn yêu cầu.

$$\text{Trường hợp 2: } -m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 2$$

t		$-m$	-2	2	
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$			$f(-2)$	$f(2)$	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min_{[-2; 2]} f(t) = f(-2) = (m - 2)^2.$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán: } (m - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases} \xrightarrow{m \geq 2} m = 3.$$

$$\text{Trường hợp 3: } -m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$$

t		-2	2	$-m$	
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$f(-2)$	$f(2)$		

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min_{[-2; 2]} f(t) = f(2) = (m + 2)^2.$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán: } (m + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases} \xrightarrow{m \leq -2} m = -3.$$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu là: $3 + (-3) = 0.$

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m + 1; m + 2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m \in (0; 2).$

B. $m \in (0; 1).$

C. $m \in (1; +\infty).$

D. $m \in (0; +\infty).$

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ do đó $y_{CT} = y(1) = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = 3.$

Thấy ngay với $m > 0$ thì trên đoạn $[m + 1; m + 2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy GTNN của hàm số đã cho trên đoạn $[m + 1; m + 2]$ là $y(m + 1) = (m + 1)^3 - 3(m + 1) + 1.$

$$\text{GTNN luôn bé hơn } 3 \Leftrightarrow (m+1)^3 - 3(m+1) - 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 2 \\ m+1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -2 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta được $m \in (0;1)$.

Câu 25: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $0 < m \leq 2$. **B.** $4 < m \leq 8$. **C.** $2 < m \leq 4$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

$$y = mx + \frac{36}{x+1} \Rightarrow y' = m - \frac{36}{(x+1)^2}$$

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có $y' = -\frac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$. Khi đó $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) = 9$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$

□ Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0, \forall x \neq -1$ Khi đó $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$.

□ Nếu $m > 0$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow m - \frac{36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{36}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \quad (l) \end{cases}$.

□ $0 < \frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{4}{9} < m \leq 36$, $\min_{x \in [0;3]} y = y\left(\frac{6}{\sqrt{m}} - 1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 100 \quad (l) \end{cases}$.

□ $\frac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$, $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3} \quad (l)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{cases}.$$

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $x_1 \leq 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

TH1: $x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \leq 0 < m + 1 \Leftrightarrow -1 < m \leq 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

BBT của hàm số:

x	0	$m+1$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y				

TH2: $0 < x_1 < x_2$.

BBT của hàm số

x	0	$m-1$	$m+1$	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1 > 0 \\ y(m+1) \leq y(0) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+1)^3 - 3m(m+1)^2 + 3(m^2-1)(m+1) + 2020 \leq 2020 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+1)^2(m-2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq 2 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 2.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Vậy $m \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$. Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 10.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = m \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m \neq 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x \in (1; +\infty)$.

Nếu $m > 0$ thì $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 5]$. Do đó $\min_{[2;5]} f(x) = f(2) = m; \max_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$.

$$\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m + 2m = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -2 \\ m_2 = 5 \end{cases}$$

Do $m > 0$ nên nhận $m_2 = 5$.

Nếu $m < 0$ thì $f'(x) < 0, \forall x \in [2;5]$. Do đó $\min_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m; \max_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$.

$$\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow 2m + m = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -2 \\ m_2 = 5 \end{cases}$$

Do $m < 0$ nên nhận $m_1 = -2$.

Vậy $m_1 + m_2 = 3$.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$

để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1 .

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x + 2 \neq 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y(\cos x + 2) = m \sin x + 1$$

$$\Leftrightarrow m \sin x - y \cos x = 2y - 1.$$

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} y = \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3}.$$

$$\min_{\mathbb{R}} y < -1 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 3m^2} > 5 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{2} \approx 2,82 \\ m < -2\sqrt{2} \approx -2,82 \end{cases}.$$

Mà $m \in \mathbb{R}, m \in [-5;5]$ nên $m \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$.

Câu 29: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{34}{\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2 + 1}} \text{ trên đoạn } [0;3] \text{ bằng } 2. \text{ Tổng tất cả các phần tử của } S \text{ bằng}$$

A. 8.

B. -8.

C. -6.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2} = |x^3 - 3x + 2m|$

Nhận thấy $\min_{[0;3]} f(x) = 2 \Leftrightarrow \max_{[0;3]} |x^3 - 3x + 2m| = 16 \quad (1).$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 2m$ trên $[0;3]$, ta có:

$+ g'(x) = 3x^2 - 3, g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0;3) \\ x = -1 \notin (0;3) \end{cases}$

$+ g(0) = 2m, g(1) = 2m - 2, g(3) = 2m + 18$

Do đó $2m - 2 \leq g(x) \leq 2m + 18, \forall x \in [0;3]$, tức $\max_{[0;3]} |x^3 - 3x + 2m| = \max_{[0;3]} \{|2m - 2|; |2m + 18|\}$.

Từ đây ta có $(1) \Leftrightarrow \max_{[0;3]} \{|2m - 2|; |2m + 18|\} = 16$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |2m + 18| > |2m - 2| \\ |2m + 18| = 16 \\ |2m + 18| \leq |2m - 2| \\ |2m - 2| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases}$. Suy ra $S = \{-7; -1\}$. Vậy, tổng các phần tử của S là -8 .

Câu 30: Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m + 1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. -2 .

B. 4 .

C. -4 .

D. 0 .

Lời giải

Chọn A

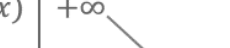
Đặt $y = f(x) = (x^3 - 3x + m + 1)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y' = f'(x) = 2(x^3 - 3x + m + 1)(3x^2 - 3)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ m = -x^3 + 3x - 1 = g(x) \end{cases}$

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	-1			1			$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	
$g(x)$	$+\infty$				1			$-\infty$
					-3			

Nếu $m \in [-3; 1]$ thì luôn tồn tại $x_0 \in [-1; 1]$ sao cho $m = g(x_0)$ hay $f(x_0) = 0$. Suy ra

$\min_{[-1; 1]} y = 0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m \notin [-3; 1]$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-1; 1]$.

Ta có: $\min_{[-1; 1]} f(x) = \min \{f(1); f(-1)\} = \min \{(m-1)^2; (m+3)^2\}$

Trường hợp 1: $m > 1$ tức là $m+3 > m-1 > 0$ suy ra

$$\min_{[-1; 1]} f(x) = (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ (TM)} \\ m = 0 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m < -3$ tức là $m-1 < m+3 < 0$ suy ra

$$\min_{[-1; 1]} f(x) = (m+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \text{ (TM)} \\ m = -2 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m = 2; m = -4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2 .

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x) = m^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 4\sqrt{4-x^2} + m + 1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

A. $-\frac{7}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = [-2; 2]$.

Đặt $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$; $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

$$\Leftrightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2} = t^2 - 4.$$

$$\Rightarrow y = g(t) = m^2 t + 2(t^2 - 4) + m + 1 = 2t^2 + m^2 t + m - 7 \text{ với } t \in [2; 2\sqrt{2}].$$

Ta có: $g'(t) = 4t + m^2$.

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-m^2}{4} < 0; \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow g(t) \text{ đồng biến trên } [2; 2\sqrt{2}] \Rightarrow \min_{[2; 2\sqrt{2}]} g(t) = g(2) = 4.$$

$$\text{Mà } g(2) = 2m^2 + m + 1 \Leftrightarrow 2m^2 + m + 1 = 4 \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Tổng các giá trị của } m \text{ thỏa mãn ycbt là } S = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-m}{x+1}$ với $m \neq -2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\max_{[1;3]} f(x) = \max \left\{ \frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4} \right\}.$

B. $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{6-m}{4}$ khi $m < -2$.

C. $\min_{[1;3]} f(x) = \min \left\{ \frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4} \right\}.$

D. $\min_{[1;3]} f(x) = \frac{2-m}{2}$ khi $m > -2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x-m}{x+1}$ với $m \neq -2$.

Tập xác định $x \neq -1$.

Ta có $f'(x) = \frac{2+m}{(x+1)^2}$ suy đạo hàm không đổi dấu $x \in [1;3]$ suy ra

$$\max_{[1;3]} f(x) = \max \{ f(1); f(3) \} = \max \left\{ \frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4} \right\};$$

$$\min_{[1;3]} f(x) = \min \{ f(1); f(3) \} = \min \left\{ \frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4} \right\}.$$

Xét với $m < -2 \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in [1;3]$. Vậy $\forall x \in [1;3] \Rightarrow f(x) \leq f(1) = \frac{2-m}{2}$

$$\Rightarrow \max_{[1;3]} f(x) = \frac{2-m}{2}.$$

Xét với $m > -2 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in [1;3]$. Vậy $\forall x \in [1;3] \Rightarrow f(x) \geq f(1) = \frac{2-m}{2}$

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = \frac{2-m}{2}.$$

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1; 3]$ là số dương?

A. 9.

B. 8.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1; 3]$ thì $m \notin [1; 3]$.

$$y' = \frac{-2m-6}{(x-m)^2}.$$

Trường hợp 1: $-2m-6 > 0 \Leftrightarrow m < -3$.

$$\text{Khi đó } \max_{x \in [1; 3]} y = y(3) = \frac{m+9}{3-m}.$$

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là số dương thì $\frac{m+9}{3-m} > 0 \Leftrightarrow m+9 > 0 \Leftrightarrow m > -9$.

Vậy các số nguyên m thỏa là $-8, -7, -6, -5, -4$.

Trường hợp 2: $-2m-6 < 0 \Leftrightarrow m > -3$.

$$\text{Khi đó } \max_{x \in [1; 3]} y = y(1) = \frac{m+7}{1-m}.$$

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là số dương thì $\frac{m+7}{1-m} > 0 \Leftrightarrow 1-m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2, -1, 0$.

Trường hợp 3: $-2m-6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Khi đó $y = 1$. Nên $\max_{x \in [1; 3]} y = 1$.

Vậy $m = -3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.