

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN THÔNG QUA BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

1.1.1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn. Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

1.1.2 Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là

$$y = \frac{a}{c} \text{ và tiệm cận đứng } x = -\frac{d}{c}.$$

Câu 1: Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$-$	$+$	
y	-4	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = -4$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Nên đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ta được tiệm cận ngang $y = 3$

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ ta được tiệm cận đứng $x = -2$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-5	1	-5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A.** 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

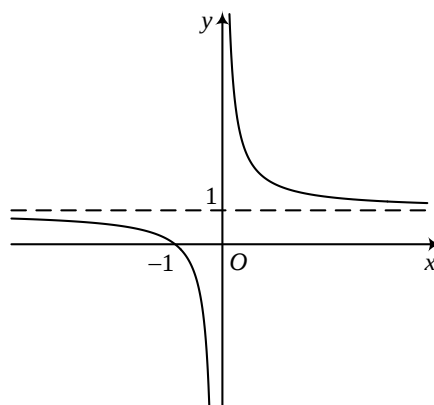
Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có:

+ Tiệm cận ngang $y = -5$

+ Tiệm cận đứng $x = 2$.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A.** Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.

- B.** Hàm số có hai cực trị.
C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	0	2	$-\infty$	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A.** 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow y = 5$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	-	+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A.** 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 2.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$-$	$+$	$-$
y	$+\infty$	1	$+\infty$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải

Ta có

$\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCD và TCN là 3.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		+		+		+	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 3

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có:

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.

+ $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = -\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng.

+ $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty$.

☐ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

☐ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3 tiệm cận.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ THÔNG HÀM SỐ CHO TRƯỚC

1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $\deg P(x) > \deg Q(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $\deg P(x) < \deg Q(x)$: TCN $y = 0$

Nếu $\deg P(x) = \deg Q(x)$: $y = k$

Dạng 2: $y = f(x) = u - \sqrt{v}$: Nhân liên hợp $\Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}}$

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Điều kiện cần: giải $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ là TCD khi thỏa mãn đk đủ

Điều kiện đủ:

Điều kiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Điều kiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD

- x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3

B. 0

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 + \frac{2}{x}} = 0 \text{ } \Rightarrow y = 0 \text{ là đường tiệm cận ngang}$$

của đồ thị hàm số.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x+1)^2 - x - 1}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^2+9x}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x+9}{(x-2)(5x+1+\sqrt{x+1})} = \frac{-9}{4}$$

$\Rightarrow x = 0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 12: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

- A.** $x=3$ và $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$ và $x=-2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 13: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

TXĐ: $D = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$

Nên đường thẳng $x=-1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$$

Nên đường thẳng $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 14: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$$\text{TH1: } x < -1 \Rightarrow x+1 < 0. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Suy ra hàm số TCN $y = -1$, không có TCD.

$$\text{TH2: } x > 1 \Rightarrow x+1 > 0. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Suy ra hàm số TCN $y = 1$, TCD $x = 1$.

Vậy hàm số có 2 TCN và 1 TCN

Câu 15: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \frac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)(\sqrt{x(4x+6)}+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \frac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)}+2} = \frac{-5}{2}$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 2$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Điều kiện: $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là đường tiệm cận}$$

ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = 0 \text{ nên}$$

đường thẳng $x = -1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 17: Hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ TCN: $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 0$.

Câu 18: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đkxđ: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} \right) = +\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} \right) = 0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{5\sqrt{x^2+6}+x-12}{4x^3-3x-1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A.** Đồ thị (C) của hàm số không có tiệm cận.
- B.** Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$.
- C.** Đồ thị (C) của hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ và hai tiệm cận đứng $x=1; x=-\frac{1}{2}$.
- D.** Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$ và một tiệm cận đứng $x=1$

Lời giải

Chọn D

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ 1; -\frac{1}{2} \right\}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một TCD là $x=1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một TCN là $y=0$

Câu 20: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A.** 2.
- B.** 3.
- C.** 0.
- D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tập xác định $D = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^2+x}{(3x+1)(2x-\sqrt{x^2-x})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1} = \frac{1}{2} \text{ nên đồ thị không có tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3},$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3 + \frac{1}{x}} = 1 \text{ nên đồ thị có hai tiệm cận ngang}$$

là $y = \frac{1}{3}$ và $y = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 21: Đồ thị hàm số $y = \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n . Giá trị của $m + n$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn A

$$D = [-2; 2] \setminus \{-1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

Đ $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Vậy $m + n = 1$.

Câu 22: Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}. \text{ Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

A. $n = 0, d = 2$.

B. $n = d = 1$.

C. $n = 1, d = 2$.

D. $n = 0, d = 1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = (0; 1)$.

Từ tập xác định suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. $n = 0$.

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = -\infty$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = -\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng, $d = 2$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D = [-1; 0) \cup (2; +\infty)$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{25x^2 + 9x}{(x^2 - 2x)(5x + 1 + \sqrt{x + 1})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{25x + 9}{(x - 2)(5x + 1 + \sqrt{x + 1})} = -\frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{2}{x}} = 0.$$

Vậy đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận có phương trình $x = 2$ và $y = 0$.

Câu 24: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

$$+ \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)} = -\infty$$

do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 - \frac{5}{x}} = -\frac{1}{3} \text{ do đó đường thẳng } y = -\frac{1}{3} \text{ là đường}$$

tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

□ Tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\square \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (1)^-} y = +\infty.$$

$\Rightarrow$ Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm 1$.

$$\square \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow \text{đồ thị có một tiệm cận ngang } y = 1.$$

Câu 26: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-8}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-\frac{8}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = 5$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-8}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-\frac{8}{x}}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = -5$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = -5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = -\infty$$

Dạng 2: $y = f(x) = u - \sqrt{v}$: Nhân liên hợp $\Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}}$

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có TXĐ: D

Điều kiện cần: giải $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ là TCD khi thỏa mãn đk đủ

Điều kiện đủ:

Điều kiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Điều kiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD

- x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Câu 27: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm

cận đứng. Số phần tử của S là

A. vô số.

B. 12.

C. 14.

D. 13.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-6x+2m > 0 \end{cases}.$$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt } x_1, x_2 \text{ lớn hơn } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9-2m > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \\ (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ 3 > -2 \\ 4+12+2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m > -8 \end{cases}.$$

Do đó tập $S = \{-7; -6; -5; \dots; 4\}$ có 12 giá trị.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14.

B. 8.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16-m > 0 \\ m-7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m \neq 7 \end{cases}.$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3; \dots; 6; 8; \dots; 15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039.

B. 4040.

C. 4038.

D. 4037.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng (*).

$$\text{Có } x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m = (x-m)(x^2-2mx+1)$$

$$x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \end{cases} \quad (2)$$

(*) $\Leftrightarrow x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow m \neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 2m.m + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 2m.3 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3, m \neq \frac{5}{3} \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \end{cases}$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\{-2020; -2019; \dots; -2; 2; 4; 5; \dots; 2020\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 30: Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$

có đúng hai đường tiệm cận?

A. 200.

B. 2.

C. 199.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có điều kiện xác định là $\begin{cases} x \neq m \\ x \in (0; 2) \end{cases}$, khi đó đồ thị hàm số sẽ không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \infty$

Suy ra $x = 0$, $x = 2$ là hai đường tiệm cận đứng

Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$, theo bài m thuộc đoạn $[-100; 100]$

. Vậy có 200 số nguyên của m thỏa mãn đầu bài.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m = -1$

B. $m \in \{1; 4\}$

C. $m = 4$

D. $m \in \{-1; -4\}$

Lời giải

$$y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + m}{(x-1)(x-2)}.$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm

cận đứng $\Leftrightarrow$ pt $x^2 + m = 0$ nhận nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó: $\begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}.$

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng

một đường tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$.

* Trường hợp 1: $m = 0$.

Khi đó $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó chọn $m = 0$.

* Trường hợp 2: $m \neq 0$.

Xét phương trình $(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1) = 0$ (1)

Nhận thấy: (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 0$ và phương trình (1) không thể có duy nhất một nghiệm đơn với mọi m .

Do đó (C) có đúng một đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) không có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ (1) vô

nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m < 0 \\ 9m^2-9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases}$.

Kết hợp các trường hợp ta được $m = 0$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m > 2$

B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

- Câu 34:** Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.
- A. 0 B. -3 C. 3 D. 6

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x = -\frac{d}{c} = -m - 3 = 0$ làm TCD $\Rightarrow m = -3$

Đồ thị hàm số nhận $y = \frac{a}{c} = n - 3 = 0$ làm TCN $\Rightarrow n = 3$.

Vậy $m + n = 0$.

- Câu 35:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?
- A. 8 B. 6 C. 7 D. Vô số

Lời giải

TH1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (x_1; x_2)$, ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

TH2: $m = 0 \Rightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 4)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} y = -\infty$. Khi đó ta có $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

TH3: $m > 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2m > 0 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 6 \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}. \text{ Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của}$$

tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

- Câu 36:** Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = \pm 1$

D. Không có m

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a), (-\infty; a], (a, +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$

$m \geq 0$

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x+7}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

TH2: $m > 0, y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$

Khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x\sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} \right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

Vậy $m = 1$

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a = -1; b = 2$.

B. $a = 4; b = 4$.

C. $a = 1; b = 2$.

D. $a = -1; b = -2$.

Lời giải

Chọn C

+ $b = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b \neq 0$, tập xác định của hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{b} \right\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+1}{bx-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{b - \frac{2}{x}} = \frac{a}{b}.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}^+} y = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}^+} \frac{ax+1}{bx-2} = \begin{bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $a=1; b=2$.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19.

B. 15.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình

$$2x^2 + 6x - m - 3 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 2(-m-3) > 0 \\ 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{15}{2} \\ m \neq 5 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là

$\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

A. 4.

B. 2.

C. Vô số.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

* Xét điều kiện tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

$$\text{Trường hợp 1: } g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{16}{9}$$

Trường hợp 2: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của

$$g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{16}{9}$$

Vậy $m \geq 0$ thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -\sqrt{m}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m > 0$

* Xét trường hợp $x = -2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x = -2$ là nghiệm của $g(x) = mx^2 + 3mx + 4$

$$\Rightarrow g(-2) = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\text{Khi đó } y = \frac{\sqrt{2x^2 + 6x + 4}}{x + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \frac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}} \right] = -\infty$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

$\Rightarrow m = 2$ thỏa mãn

* Xét trường hợp $x = -2$ không là nghiệm của tử số, để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm

$$\text{số thì } \begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ g(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ với $\forall m \in (0; 2]$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m \in (0; 2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m = 1; m = 2$.

Câu 40: Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. -3.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2$$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 1$ hoặc $f(x) = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2 - 2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m = 1; m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\frac{1}{2}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6; 6]$

của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12.

B. 9.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x \neq 3$.

Xét phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ ta có

$$x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - 2mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases}$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x \neq 3$ khi và chỉ khi $m \neq 3$ và phương trình

$$x^2 - 2mx + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x \neq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Do m nguyên và $m \in [-6; 6]$ nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m = 1$.

B. $m > 1$.

C. $m = 1$ và $m = 0$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m} = \lim_{x \rightarrow m} \left(2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m} \right).$$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$,

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy đáp án **C**.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}} \text{ có hai tiệm cận đứng.}$$

A. 2019.

B. 2021.

C. 2018.

D. 2020.

Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có

hai nghiệm phân biệt khác - 2

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 - m > 0 \\ 12 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -12 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2017; -2016; \dots; 3\} \setminus \{-12\}.$$

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là: $3 - (-2017) + 1 - 1 = 2020$ giá trị.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2019m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

$$\Leftrightarrow 2019m = 2020m^4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{\frac{2019}{2020}} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

C. $m > 1$.

D. $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > m$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Xét phương trình } [x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 (*) \end{cases}$$

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $m < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 > 0 \\ (x_1-m)(x_2-m) > 0 \\ x_1+x_2 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ x_1x_2 - m(x_1+x_2) - m^2 > 0 \\ 2m+1 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m-m^2 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}.$$

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng

1 đường tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = mx^2 - 6x + 3$ và $g(x) = 9x^2 + 6mx + 1$. Ta xét các trường hợp:

+ Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó ta có $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận

ngang là đường thẳng $y = 0$ do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 2: $m \neq 0$ và cả hai tam thức $f(x)$ và $g(x)$ đều vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_f < 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m < 0 \\ 9m^2-9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

+ Trường hợp 3: Tam thức $g(x)$ nhận $x = \frac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{13}{12}$ khi đó $f(x)$

luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1

đường tiệm cận

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

A. $0 < m < 1$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m > 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k

sao cho:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = k$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = k$$

Hiển nhiên nếu $m \neq 0$ thì giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1})$ không hữu hạn

Nếu $m > 0$ ta có

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = +\infty.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-m) - 1}{x - \sqrt{mx^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-m) - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}$$

Để giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi $m=1$.

- Câu 48:** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?
- A.** 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Với $m = 0$; ta có hàm số $y = \frac{x-2}{-2x+4} = -2 \Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{mx^2-2x+4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow mx^2 - 2x + 4 = 0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2 - 2x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

$$mx^2 - 2x + 4 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

$mx^2 - 2x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 49:** Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2019x}{\sqrt{17x^2 - 1} - m|x|}$ có bốn đường tiệm cận. Tính số phần tử của tập S .
- A.** Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{2019}{m - \sqrt{17}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{2019}{\sqrt{17} - m}.$$

Với $m \neq \sqrt{17}$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{2019}{m - \sqrt{17}}, y = \frac{2019}{\sqrt{17} - m}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $\sqrt{17x^2 - 1} - m|x| = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \sqrt{17x^2 - 1} = m|x| \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 17x^2 - 1 = m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ (17 - m^2)x^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 17 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < \sqrt{17}$.

Suy ra $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Câu 50: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2x}{x}}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + m^2x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^4 + x + 1} - 1}{x} + \frac{m^2x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3 + mx}{x(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{x^4 + x}{x(\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1)} + m^2 \right].$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2 + m)}{(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{(x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1} + m^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} - \frac{1}{3} + m^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 2 = 0 \text{ Vậy } m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}.$$

- Câu 51:** Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?
A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)} - 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = -1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó hàm số là $y = \frac{|x| - 1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m > 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0] \cup [m; +\infty)$.

$x = -2 \in D$. $g(-2) = \sqrt{2(m+2)} - 1 \geq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m = 1, m = 2, \dots, m = 9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m .

Trường hợp 3: $m < 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; m] \cup [0; +\infty)$.

Để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x = -2 \in D$ hay $m^3 - 2$. Nên chỉ có $m = -2, m = -1$ thỏa mãn

Với $m = -1$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+1)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{2} - 1 \geq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m = -2$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+2)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{x(x+2)} - 1 = -1 \geq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

- Câu 52:** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.
A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2+x \neq m \end{cases}$.

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m} = 0, \forall m.$$

$\Rightarrow y = 0$ là pt đường tiệm cận ngang.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x$.

$$f'(x) = 2x + 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	12	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m < 12$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m \geq 12$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $m \in [12; 2019]$.

Vậy có 2008 giá trị nguyên của m .

Câu 53: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2

B. 3

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

+ $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

+ Do đó: Yêu cầu bài toán 9 đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

+ $m = 0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 0$ thỏa bài toán.

+ $m \neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2 - 2x + 3 = 0$

có nghiệm kép hoặc nhận $x = 1$ làm nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = -1 \end{cases}$

+ KL: $m \in \left\{0; \frac{1}{3}; -1\right\}$.

Câu 54: Cho hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.

A. $1 < m < 5$.

B. $-1 < m < 2$.

C. $m < 1$ hoặc $m > 5$.

D. $m > 2$ hoặc $m < -1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ không tồn tại. Suy ra $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m - 1$. Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$m-1$	$\searrow$		$+\infty$
		$\nearrow$			$\searrow$		
				$m-5$			

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m - 5 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Câu 55: Hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a - b$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{5}{4}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x) = \sqrt{3x+1} + ax + b = (x-1)^2 g(x)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = \frac{1}{2} \rightarrow \text{đáp án A.}$$

Chú ý: Với $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$ thì ta luôn có $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 2016x + 2017} - 24\sqrt{7}}{x - m}$ có tiệm cận đứng?

A. vô số.

B. 2.

C. 2017

D. 2019.

Lời giải

Chọn C

Biểu thức: $\sqrt{-x^2 + 2016x + 2017}$ có nghĩa khi $-x^2 + 2016x + 2017 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2017$.

Đặt $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2016x + 2017}$.

Xét $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$. Vậy đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x = m$, khi đó điều kiện

$$\text{là: } \begin{cases} -1 \leq x \leq 2017 \\ f(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1; 2017] \\ \sqrt{-m^2 + 2016m + 2017} \neq 24\sqrt{7} (*) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow m^2 - 2016m + 2015 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2015 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow m \in [-1; 2017] \setminus \{1; 2015\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} \text{có } 2019 - 2 = 2017 \text{ số nguyên } m \text{ thỏa mãn bài toán} \rightarrow \text{đáp án } \mathbf{C}.$

Câu 57: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}{x}}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^4 + x + 1} - 1}{x} + \frac{m^2x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3 + mx}{x(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{x^4 + x}{x(\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1)} + m^2 \right].$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2 + m)}{(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{(x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1} + m^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} - \frac{1}{3} + m^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 2 = 0 \text{ Vậy } m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2}$

có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12.

B. 11.

C. 0.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)} - 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = -1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó hàm số là $y = \frac{|x| - 1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m > 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0] \cup [m; +\infty)$.

$x = -2 \in D$. $g(-2) = \sqrt{2(m+2)} - 1 \geq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m = 1, m = 2, \dots, m = 9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m .

Trường hợp 3: $m < 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; m] \cup [0; +\infty)$.

Để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x = -2 \in D$ hay $m^3 - 2$. Nên chỉ có $m = -2, m = -1$ thỏa mãn

Với $m = -1$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+1)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{2} - 1 \geq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m = -2$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+2)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{x(x+2)} - 1 = -1 \geq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 59: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1 \leq m < 0$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $m < -1$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $m = 0$ thì $y = \frac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Nếu $m > 0$ thì $mx^2 + 1 > 0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{m}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -\sqrt{m}.$$

Suy ra đồ thị hàm

số có hai tiệm cận ngang là $y = \sqrt{m}$ và $y = -\sqrt{m}$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{mx^2 + 1}}{x+1} = +\infty \text{ nên } x = -1 \text{ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Vậy $m > 0$ không thỏa mãn.

$$\text{Nếu } m < 0 \text{ thì tập xác định của hàm số là } D = \left[-\sqrt{-\frac{1}{m}}; \sqrt{-\frac{1}{m}} \right] \setminus \{-1\}.$$

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$$-\sqrt{-\frac{1}{m}} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{1}{m}} \geq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy với $-1 \leq m < 0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.