



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $D_1: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$, $D_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-6}{4}$. Góc

giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

A. 30° .

B. 90° .

C. 60°

D. 45° .

Lời giải

Ta có VTCP của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\vec{a}_1(2; -3; 2)$ và $\vec{a}_2(1; -2; 4) \Rightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$

Vậy góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90° .

Câu 2: Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính $\cos in$ của góc giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, $d_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{9}$.

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

d_1 có vector chỉ phương $\vec{u}_1(2; 1; -1)$.

d_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2(3; 3; 9)$.

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + 9^2}} = 0$.

Câu 3: Tính cosin góc giữa đường thẳng d với trục Ox biết $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

VTCP $\vec{u}_d(2; 1; 1)$, VTCP của trục Ox là $\vec{i}(1; 0; 0)$.

Vậy $\cos(d, Ox) = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{i}) \right| = \frac{|2 + 0 + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và

$$d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$$

A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

$$\text{VTCP } \vec{u}_{d_1} = (1; -1; 2), \text{ VTCP } \vec{u}_{d_2} = (-1; 1; 1)$$

$$\text{Ta có } \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}) \right| = \frac{|1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = 0$$

$$\text{Vậy } (d_1, d_2) = 90^\circ.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 1 = 0$.

Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Gọi j là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

$$\text{Ta có } \vec{u}_d = (5; 1; 0) \text{ và } \vec{n}_{(P)} = (3; -2; 0)$$

$$\text{Khi đó } \sin j = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow j = 45^\circ.$$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $D: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(a): x + y - z - 2 = 0$. Cosin của góc tạo bởi đường thẳng D và mặt phẳng (a) bằng

A. $-\frac{\sqrt{78}}{9}$.

B. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{78}}{9}$.

Lời giải

Đường thẳng D có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 2)$ và mặt phẳng (a) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

$$\text{Ta có } \sin(D, (a)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \cos(D, (a)) = \frac{\sqrt{78}}{9}.$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

$$\text{Mp } (P) \text{ có một VTPT } \vec{n}_P = (2; -1; -1). \text{ Mp } (Q) \text{ có một VTPT } \vec{n}_Q = (1; 0; -1).$$

$$\text{Ta có } \cos[(P), (Q)] = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|2+0+1|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } [(P), (Q)] = 30^\circ.$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}.$

B. $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}.$

D. $\frac{1}{3}.$

Lời giải

Mặt phẳng (MNP) có một VTPT là $\vec{n} = [\vec{MN}, \vec{MP}] = (1;1;1).$

Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0;0;1).$

Gọi j là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos j = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x + 8y + 10z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{5}$. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A. $90^\circ.$

B. $45^\circ.$

C. $60^\circ.$

D. $30^\circ.$

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n} = (6;8;10).$

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u} = (3;4;5).$

Ta có $\vec{n} = 2\vec{u} \Rightarrow d \perp (P)$ nên góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là 90° .

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): 3x - 2y + 1 = 0$. Tính góc hợp bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

A. $45^\circ.$

B. $30^\circ.$

C. $90^\circ.$

D. $60^\circ.$

Lời giải

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (5;1;0).$

Mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 1 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (3;-2;0).$

Gọi α là góc hợp bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

$$\text{Khi đó: } \sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0|}{\sqrt{5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra: } \alpha = 45^\circ.$$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) là

- A.** 120° . **B.** 30° . **C.** 90° . **D.** 60° .

Lời giải

$(P): x - 2y - z + 2 = 0$ có VTPT $\vec{n}_P = (1; -2; -1)$.

$(Q): 2x - y + z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_Q = (2; -1; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) , ta có

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{n}_Q) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$, mặt phẳng $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là

- A.** $\frac{\sqrt{35}}{7}$. **B.** $-\frac{\sqrt{35}}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $-\frac{5}{7}$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_P = (1; 2; -2)$, $\vec{n}_Q = (1; -3; 5)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| |\vec{n}_Q|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \frac{15}{3\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): 8x - 4y - 8z - 11 = 0$ và $(Q): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$.

- A.** $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

+ Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_{(P)} = (8; -4; -8)$, $\vec{n}_{(Q)} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$.

.

+ Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu?

- A.** 45° . **B.** 30° . **C.** 90° . **D.** 60° .

Lời giải

Ta có $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt (P) nên $OH \perp (P)$.

Do đó (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; -2)$.

(Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (1; -1; 0)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos\left(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right) \right| = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $((P), (Q)) = 45^\circ$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$.

Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là

A. $\frac{\sqrt{35}}{7}$. **B.** $-\frac{\sqrt{35}}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $-\frac{5}{7}$.

Lời giải

+ Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$, $\vec{n}_{(Q)} = (1; -3; 5)$.

+ Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| |\vec{n}_Q|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \frac{15}{3\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$, $(\beta): x + 2y - z + 2 = 0$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .

A. $\varphi = 120^\circ$. **B.** $\varphi = 30^\circ$. **C.** $\varphi = 90^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; -1; 2)$; $\vec{n}_{(\beta)} = (1; 2; -1)$.

Góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)}|}{|\vec{n}_{(\alpha)}| \cdot |\vec{n}_{(\beta)}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, tính góc φ giữa mặt phẳng $(P): x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0$ và $(Oxz): y = 0$.

A. $\varphi = 135^\circ$. **B.** $\varphi = 45^\circ$. **C.** $\varphi = 90^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1; -\sqrt{2}; 1)$; $\vec{n}_{(Oxz)} = (0; 1; 0)$.

Góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Oxz) là :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Oxz)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Oxz)}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, gọi φ là góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Oxy): z = 0$.

Tính $\cos \varphi$.

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{14}}$. **C.** $\frac{3}{14}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 3)$; $\vec{n}_{(Oxz)} = (0; 0; 1)$.

Góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Oxy) là :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Oxy)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Oxy)}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 4x + my + mz + 1 = 0$ và $(Q): x - y - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60° ?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_1 = (4; m; m)$; $\vec{n}_{(Q)} = \vec{n}_2 = (1; -1; 0)$.

$$\text{Khi đó: } \cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|4 - m|}{\sqrt{2m^2 + 16} \cdot \sqrt{2}} = \frac{|4 - m|}{2\sqrt{m^2 + 8}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|4 - m|}{2\sqrt{m^2 + 8}} \Leftrightarrow m^2 + 8 = (4 - m)^2 \Leftrightarrow 8 = 16 - 8m \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + my + 2mz + 4 = 0$ và $(\beta): 6x - y - z + 3 = 0$ vuông góc với nhau.

- A.** $m = 3$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = -4$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = (2; m; 2m)$; $\vec{n}_{(\beta)} = (6; -1; -1)$.

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)} = 0 \Leftrightarrow 12 - m - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0; 0; 0), B(0; 1; 0), C(1; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.

- A.** $\varphi = 135^\circ$. **B.** $\varphi = 45^\circ$. **C.** $\varphi = 90^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$, do đó mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AA'} = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng $(A'BC)$ có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (0; 1; -1)$ và $\overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1)$.

Suy ra $(A'BC)$ có vector pháp tuyến là $[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}] = (0; -1; -1)$. Do đó $\vec{n}_2 = (0; 1; 1)$ cũng là vector pháp tuyến của $(A'BC)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.

$$\text{Khi đó: } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0; 0; 0), B(0; 1; 0), C(1; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(A'BC)$.

- A.** $\varphi = 135^\circ$. **B.** $\varphi = 45^\circ$. **C.** $\varphi = 90^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải

Ta có $A'ACC'$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, do đó $C'(1;1;1)$.

Mặt phẳng (ABC') có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0;1;0)$ và $\overrightarrow{AC'} = (1;1;1)$.

Suy ra (ABC') có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}] = (1;0;-1)$.

Mặt phẳng $(A'BC)$ có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (0;1;-1)$ và $\overrightarrow{A'C} = (1;1;-1)$.

Suy ra $(A'BC)$ có vector pháp tuyến là $[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}] = (0;-1;-1)$. Do đó $\vec{n}_2 = (0;1;1)$ cũng là vector pháp tuyến của $(A'BC)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(A'BC)$.

Khi đó: $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a, CD = DA = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

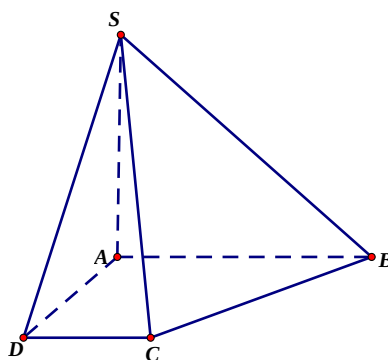
A. $\frac{3\sqrt{15}}{15}$.

B. $\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

C. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O(0;0;0), D(a;0;0), B(0;2a;0), S(0;0;2a)$, thì $C(a;a;0)$

Ta có $\overrightarrow{SB} = (0;2a;-2a), \overrightarrow{SC} = (a;a;-2a), \overrightarrow{SD} = (a;0;-2a)$,

$[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (-2a^2; -2a^2; -2a^2), [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}] = (-2a^2; 0; -a^2)$.

Suy ra mặt phẳng (SBC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1;1;1)$, mặt phẳng (SCD) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2;0;1)$.

Ta có $\cos((SBC), (SCD)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|3|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

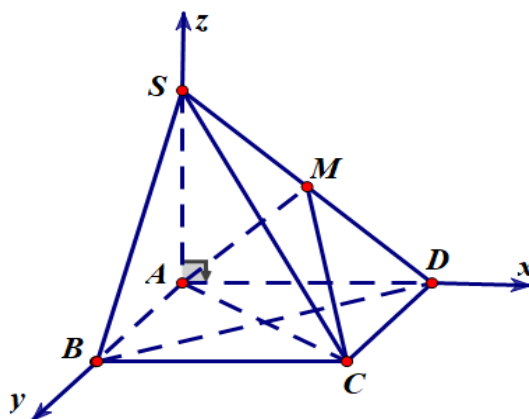
A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $-\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

C. $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ và chuẩn hóa cho $a = 1$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;2)$

Ta có M là trung điểm $SD \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $C(1;1;0)$.

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), \overrightarrow{AC} = (1; 1; 0), [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}] = \left(-1; 1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (AMC) \text{ có một vtpt } \vec{n} = (-2; 2; 1)$$

$$\overrightarrow{SB} = (0; 1; -2), \overrightarrow{SC} = (1; 1; -2), [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (0; 2; 1) \Rightarrow (SBC) \text{ có một vtpt } \vec{k} = (0; 2; 1)$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) thì $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{Do } \tan \alpha > 0 \text{ nên } \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy là 60° . Gọi M là trung điểm BC . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM .

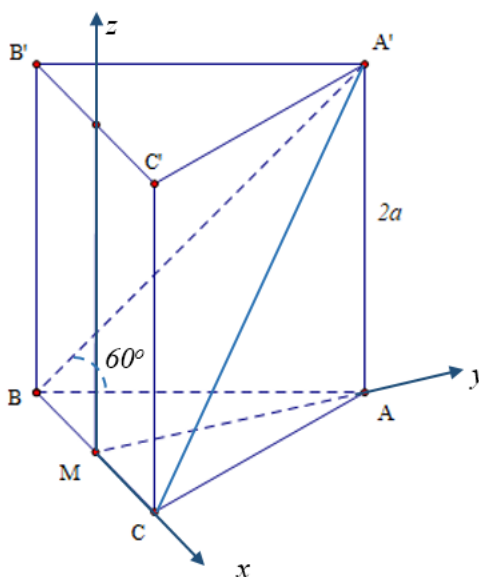
A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } AB = AC = BC = \frac{2a}{\tan 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow MC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

$$\text{Khi đó: } M(0;0;0), A(0;a;0), C\left(\frac{a}{\sqrt{3}};0;0\right), A'(0;a;2a).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{A'C} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}; -a; -2a\right) \Rightarrow A'C = \frac{4a}{\sqrt{3}}.$$

$$\overrightarrow{AM} = (0; -a; 0) \Rightarrow AM = a.$$

$$\text{Khi đó có } \cos(A'C, AM) = \frac{|\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{A'C}| |\overrightarrow{AM}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30° . Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN) .

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}.$

B. $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}.$

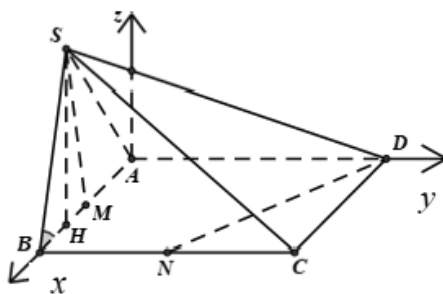
D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

Lời giải

Giả sử cạnh đáy có độ dài là 1.

$$\text{Trong } (SAB), \text{ kẻ } SH \perp AB \text{ tại } H. \text{ Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.



$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông tại } S \text{ có: } SB = AB \cdot \cos SBA = 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SBH \text{ vuông tại } H \text{ có: } BH = SB \cdot \cos SBH = \frac{3}{4} \text{ và } SH = BH \cdot \sin SBA = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$AH = AB - BH = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow S\left(\frac{1}{4}; 0; \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), D(0; 1; 0), N\left(1; \frac{1}{2}; 0\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SM} = \left(\frac{1}{4}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{DN} = \left(1; -\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow \cos(SM, DN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

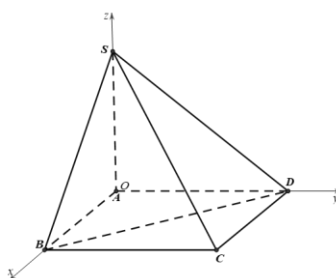
A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$.

B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải



Cho $a = 1$.

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó, ta có:

$$A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; \sqrt{3}; 0), S(0; 0; 1), C(1; \sqrt{3}; 0).$$

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-1; \sqrt{3}; 0)$, nên đường thẳng BD có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0)$.

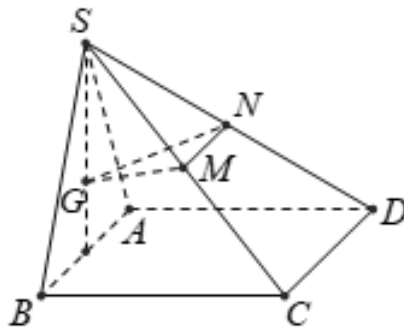
$$\text{Ta có } \overrightarrow{SB} = (1; 0; -1), \overrightarrow{BC} = (0; \sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}).$$

Như vậy, mặt phẳng (SBC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



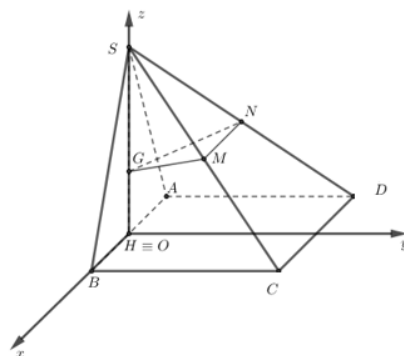
A. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

D. $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải



Cho $a = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right); A\left(\frac{-1}{2};0;0\right); B\left(\frac{1}{2};0;0\right); C\left(\frac{1}{2};1;0\right); D\left(\frac{-1}{2};1;0\right)$$

$$\text{suy ra } G\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GN}] = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{24}; \frac{1}{4}\right)$.

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (GMN) \text{ và } (ABCD), \text{ ta có } \cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $AB = 2a, AD = 3a$ và $SA = 2a$. Cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

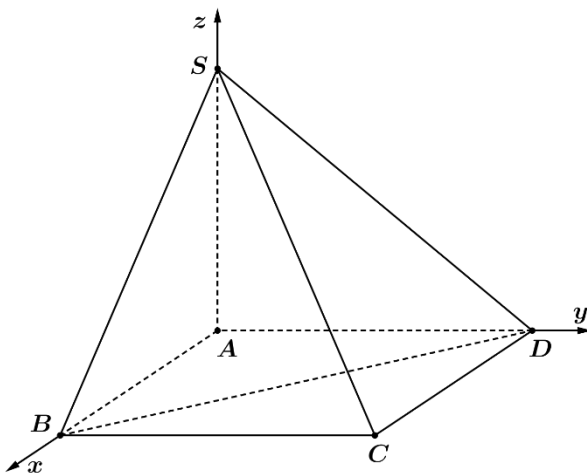
A. $-\frac{5}{\sqrt{221}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{221}}$.

C. $\frac{3}{\sqrt{221}}$.

D. $-\frac{3}{\sqrt{221}}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $A \equiv O$.

Ta có $B(2a; 0; 0), D(0; 3a; 0), S(0; 0; 2a)$ và $C(2a; 3a; 0)$.

Suy ra $\vec{SC} = (2a; 3a; -2a)$ và $\vec{BD} = (-2a; 3a; 0)$.

Hai đường thẳng SC và BD có vector chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (2; 3; -2)$ và $\vec{v} = (-2; 3; 0)$.

$$\text{Vậy } \cos(SC, BD) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{5}{\sqrt{221}}.$$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0; 10; 0)$ với vận tốc $\vec{v} = (150; 150; 40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



A. 10° .

B. 12° .

C. 11° .

D. 9° .

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng biểu thị cho hướng chuyển động bay lên của máy bay.

Ta có Δ nhận vector $\vec{v} = (150; 150; 40) = 10(15; 15; 4)$ làm vector chỉ phương.

Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Gọi j là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxy) .

$$\text{Suy ra } \sin j = \left| \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|15 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{15^2 + 15^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{466}}.$$

Vậy góc nâng của máy bay là $j \approx 11^\circ$.